NOTAS SOBRE EL AJUSTE DE UNA TENDENCIA LOGISTICA

Edmundo Meneses *

Muy a menudo sucede que en un trabajo econométrico se hace necesario proyectar una serie cronológica cuya tendencia secular se caracteriza por un crecimiento acelerado durante los primeros períodos, un crecimiento retardado en períodos posteriores hasta hacerse nulo en el largo plazo. También sucede generalmente que el problema de proyectar una serie con ese comportamiento se resuelve ajustando una exponencial de algún tipo con lo cual se obtienen proyecciones algo sobreestimadas.

Un ejemplo clásico de este tipo de tendencia, citado por Yamane, lo constituye la evolución de la industria de la TV en los Estados Unidos la cual en sus inicios tuvo un crecimiento tremendamente acelerado para ir declinando gradualmente hasta llegar a un nivel de saturación con un crecimiento insignificante.

Este tipo de tendencia puede observarse en las series de población y en algunas series económicas relacionadas con ella. Una curva que suele utilizarse para describir este tipo de tendencia es

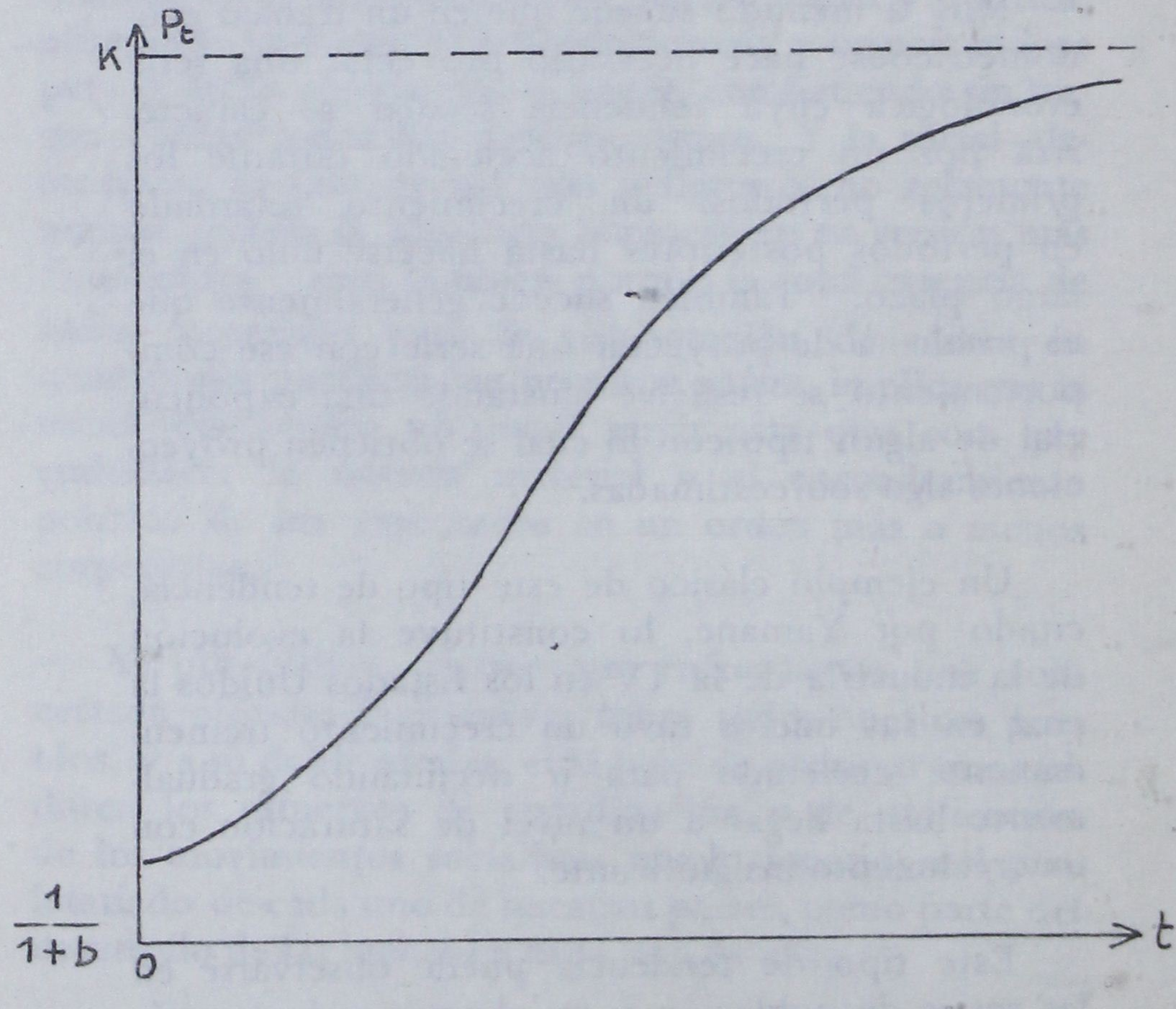
---

* *Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Central.*

la llamada curva logística, cuya expresión analítica es la siguiente:

$$P_t = \frac{k}{1 + be^{-at}} \qquad (1)$$

donde a, b y k son constantes positivas. Esta función se representa gráficamente en la figura siguiente:



Esta función tiene una asíntota igual a k y, para $t = 0$, $P_0 = \frac{k}{1 + b}$

Se han propuesto algunos métodos para estimar los parámetros a, b y k:

I. Método de los puntos equidistantes.-

Consiste en seleccionar tres puntos (t_1, P_{t_1}), (t_2, P_{t_2}) y (t_3, P_{t_3}) tales que $t_1 = 0$, $t_2 = r$ y $t_3 = 2r$ y reemplazar en la expresión *(1)* con lo cual se obtiene un sitema de tres ecuaciones en las incógnitas a, b y k:

$$P_o = \frac{k}{1 + b}$$

$$P_r = \frac{k}{1 + be^{-ar}}$$

$$P_{2r} = \frac{k}{1 + be^{-2ar}}$$

La solución al sistema anterior es:

$$a = -\frac{1}{r} \ln \frac{P_0 . (P_{2r} - P_r)}{P_{2r}(P_r - P_0)}$$

$$b = \frac{P_{2r}\,(P_r - P_0)^2}{P_0\,(P_r^2 - P_0\,P_{2r})}$$

$$k = \frac{P_r (P_r P_{2r} - 2P_0 P_{2r} + P_0 P_r)}{P_r^2 - P_0 P_{2r}}$$

(En este trabajo el símbolo "ln" equivale a "logaritmo natural")

Como podrá apreciarse este método equivale a hacer pasar la curva a ajustar por los valores observados de la variable **P** en tres instantes igualmente espaciados en el tiempo.

II Método de los semipromedios.-

Consiste en tomar el valor recíproco de la expresión (1), obteniendose de esta manera:

$$\frac{1}{P_t} = \frac{1}{k} + \frac{b}{k} e^{-at}$$

y llamando

$$z_t = \frac{1}{P_t}$$

$$A = \frac{1}{k}$$

$$B = \frac{b}{k}$$

$$C = e^{-a}$$

la expresión anterior puede escribirse así:

$$z_t = A + BC^t$$

expresión análitica que representa una exponencial modificada. Para estimar los parámetros A, B y C se divide el total de observaciones en tres grupos iguales. Si no se pudiese hacer esto por no ser este total un múltiplo de tres, entonces se desecha un número de observaciones para hacer que el total cumpla con esta condición. Estos tres grupos de observaciones se suman obteniendose así los semipromedios:

$$S_1 = \sum_{t=0}^{h-1} z_t$$

$$S_2 = \sum_{t=k}^{2h-1} z_t$$

$$S_3 = \sum_{t=2h}^{3h-1} z_t$$

Ahora si se efectúan las sumaciones correspondientes en la expresión (2) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$hA + B \frac{1 - C^h}{1 - C} = S_1$$

$$hA + BC^h \frac{1 - C^h}{1 - C} = S_2$$

$$hA + BC^{2h} \frac{1 - C^h}{1 - C} = S_3$$

Este sistema tiene como solución:

$$C = \sqrt[h]{\frac{S_2 - S_3}{S_1 - S_2}}$$

$$B = \frac{(S_1 - S_2)(1 - C)}{(1 - C^h)^2}$$

$$A = \frac{S_1 (1 - C) - B(1 - C^h)}{h(1 - C)}$$

Y los parámetros a, b y k de la logística se obtienen así:

$$a = -\ln C$$

$$b = \frac{B}{A}$$

$$k = \frac{1}{A}$$

Como puede apreciarse este método constituye una pequeña variante del método de los puntos equidistantes, donde en lugar de hacer pasar la curva a ajustar por los valores observados en tres instantes equidistantes, esta se hace pasar por los promedios de tres grupos iguales de observaciones.

III. Método de Hotelling.-

Consiste en transformar la ecuación de la logística de tal manera que sea posible aplicar el criterio de los mínimos cuadrados en la estimación de los parámetros a, b y k . Esto se consigue derivando (1) para obtener:

$$\frac{1}{P_t} \cdot \frac{dP_t}{dt} = a - \frac{a}{k} P_t \qquad (3)$$

Una buena aproximación del primer miembro de (3) se consigue con la expresión:

$$Y_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$$

con lo cual la ecuación (3) se transforma en:

$$Y_t = u + vP_t$$

donde:

$$u = a \quad y \quad v = -\frac{a}{k} \qquad (4)$$

Como puede apreciarse, se ha obtenido una expresión que es lineal en los parámetros u y v, condición esencial para poder aplicar el criterio de los mínimos cuadrados en la estimación de ellos. Las ecuaciones normales para la estimación son:

$$\Sigma Y_t = nu + v \Sigma P_t$$

$$\Sigma P_t Y_t = u \Sigma P_t + v \Sigma P_t^2$$

Con estas ecuaciones se estiman u y v lo cual nos daría:

$$a = u \quad y \quad k = -\frac{u}{v}$$

una vez estimadas a y k, se estima b haciendo que la curva pase por el punto cuyas coordenadas son los valores medios de t y de P_t; o sea:

$$\ln b = \frac{n-1}{2} a + \frac{\Sigma \ln(\frac{k}{P_t} - 1)}{n}$$

lo cual da:

$$b = \text{antiln} \; \frac{n-1}{2} + \frac{\Sigma \ln(\frac{k}{P_t} - 1)}{n}$$

El objeto de este trabajo ha sido presentar un método con un enfoque diferente al de los anteriores. Este consiste en tomar el valor recíproco de (1) a la manera del método II:

$$\frac{1}{P_t} = \frac{1 + be^{-at}}{k}$$

o bien: $z_t = \dfrac{1 + be^{-at}}{k}$ haciendo: $z_t = \dfrac{1}{P_t}$ (4)

Si en esta expresión se hace $t = t + 1$ se obtiene:

$$z_{t+1} = \frac{1 + be^{-a(t+1)}}{k} \qquad (5)$$

y, luego, despejando $^{-at}$ en (4):

$$e^{-at} = \frac{kz_t - 1}{b}$$

y reemplazando en (5) se llega a :

$$z_{t+1} = \frac{1 - e^{-a}}{k} + e^{-a} z_t \qquad (6)$$

haciendo:

$$A = \frac{1 - e^{-a}}{k} \quad \text{y} \quad B = e^{-a}$$

la expresión (6) puede escribirse así:

$$z_{t+1} = A + B z_t$$

y entonces se ve claramente que se ha llegado a un esquema autorregresivo de primer orden en z en donde los parámetros A y B aparecen en forma lineal lo cual posibilita el uso del criterio de los mínimos cuadros para la estimación de los mismos. Las ecuaciones normales son:

$$\Sigma z_{t+1} = nA + B \Sigma z_t$$

$$\Sigma z_t z_{t+1} = A\Sigma z_t + \Sigma z_t^2$$

Con las estimaciones de A y B se obtienen las de a y k:

$$a = -\ln B$$

$$k = \frac{1 - B}{A}$$

La estimación de b se puede obtener empleando el criterio de Hetelling ya presentado antes en el sentido de que la curva que mejor se ajusta a las observaciones es aquella que pasa por el punto cuyas coordenadas son las medias aritmética de t y de
denadas son las medias aritmética de t y de P_t:

$$\ln b = \frac{n-1}{2} a + \frac{\Sigma \ln \left(\frac{k}{P_t} - 1\right)}{n}$$

Como aplicación de estos métodos, se ha ajustado la logística a los datos de población del Ecuador en el período 1950–1974. Se han empleado los cuatro métodos aquí expuestos con los resultados siguientes:

I. **Puntos equidistantes:**

$$P_t = \frac{14731,67453}{1 + 3,589306708\ e^{-0,0434186294\ t}}$$

II. **Semipromedios:**

$$P_t = \frac{13750,9024}{1 + 3,324840318\ e^{-0,0448967169\ t}}$$

III. **Hotelling:**

$$P_t = \frac{19293,26833}{1 + 5,036624725\ e^{-0,0393370448\ t}}$$

IV. **Esquema autorregresivo:**

$$P_t = \frac{21779,95707}{1 + 6,228667926\ e^{-0,0375795271\ t}}$$

A continuación, se presentan las cifras resultantes de emplear los cuatro métodos para proyectar la población del Ecuador:

ESTIMACION SEGUN LOS DIFERENTES METODOS

AÑOS	*T*	*POBLACION*	*I*	*II*	*III*	*IV*
		(*miles*	*de*	*personas*	)	
1950	*0*	*3210*	*3210*	*3180*	*3196*	*3213*
1951	*1*	*3309*	*3320*	*3291*	*3302*	*3317*
1952	*2*	*3408*	*3433*	*3404*	*3411*	*3425*
1953	*3*	*3516*	*3549*	*3521*	*3523*	*3534*
1954	*4*	*3620*	*3667*	*3639*	*3638*	*3647*
1955	*5*	*3746*	*3788*	*3761*	*3756*	*3762*
1956	*6*	*3868*	*3912*	*3885*	*3876*	*3881*
1957	*7*	*3995*	*4038*	*4011*	*3999*	*4003*
1958	*8*	*4120*	*4166*	*4140*	*4125*	*4127*
1959	*9*	*4253*	*4297*	*4271*	*4254*	*4254*
1960	*10*	*4398*	*4430*	*4404*	*4386*	*4384*
1961	*11*	*4548*	*4566*	*4540*	*4521*	*4517*
1962	*12*	*4704*	*4704*	*4677*	*4659*	*4653*
1963	*13*	*4832*	*4844*	*4819*	*4799*	*4792*
1964	*14*	*4964*	*4986*	*4958*	*4942*	*4934*
1965	*15*	*5100*	*5131*	*5101*	*5088*	*5079*
1966	*16*	*5239*	*5277*	*5246*	*5237*	*5227*
1967	*17*	*5382*	*5425*	*5393*	*5388*	*5378*
1968	*18*	*5530*	*5574*	*5541*	*5542*	*5531*
1969	*19*	*5681*	*5725*	*5690*	*5699*	*5688*
1970	*20*	*5836*	*5878*	*5840*	*5858*	*5847*
1971	*21*	*5996*	*6032*	*5991*	*6020*	*6009*
1972	*22*	*6160*	*6187*	*6144*	*6184*	*6174*
1973	*23*	*6328*	*6344*	*6297*	*6351*	*6341*
1974	*24*	*6501*	*6501*	*6450*	*6519*	*6512*