Una abreviación al cálculo de programación linear (*)

F. V. Waugh y G. L. Burrows (1)

Tomado de "Econométrica" Volumen 23, Nº 1 Enero 1955.
Los traductores agradecen la autorización de los autores y de la revista "ECONOMETRICA", para su publicación.

La programación es el problema básico de la vida económica. Los agricultores, industriales e intermediarios están programando cuando buscan la manera más ventajosa de utilizar los recursos a su disposición, y los compradores están programando cuando buscan la combinación más barata de bienes y servicios para satisfacer sus necesidades.

Algunos de los problemas de programación pueden expresarse en términos lineares, otros no. El análisis de tales problemas fué llamado "Programación Linear" por Dantzig [2] quien inventó el "método simplex" para resolverlos. Hay algunos autores que han diseñado en detalle variaciones del "método simplex", entre ellos, Dantzig [3], Dorfman [4, 5] y Charnes, Coo-

---

(*) Traducido del inglés por Jaime Cifuentes T. y Lucy A. de Cifuentes.

(1) Los autores reconocen agradecidamente la ayuda de Karl Fox, del Servicio de Mercado Agrícola y de Richard A. King, de la Universidad de Carolina del Norte.

per y Henderson [1] y Koopmans [8] llama a la programación (tanto linear como no lincar) "análisis por actividades".

Presentamos a continuación un método de análisis que parece tener dos ventajas. Primero, puede solucionar muchos de los problemas más secillos de la programación linear con rapidez y facilidad. Segundo se lo puede emplear como una abreviación para la solución de problemas más complicados —reemplazando algunas pocas de las primeras iteraciones de la usual tabla de trabajo "simplex" empleada por Dantzig, Dorfman y otros.

1.—EL PROBLEMA

Hablaremos de nuestro método en términos de los problemas enfrentados por los productores, más aún, con ciertas modificaciones de acuerdo al caso, se lo puede también emplear para el análisis de los problemas de compradores (tales como encontrar la mezcla más barata de alimentos que proporcionaría a las vacas lecheras con cantidades dadas de elementos químicos y vitaminas).

Un productor puede escoger uno o más de m procesos (a veces también designados por "actividades" o "empresas"). Definimos un proceso como un método específico de producir algún producto o grupo de productos. Así, existen varios tipos de procesos para cultivar papas, cada uno empleando cantidades diferentes de tierra, semillas, fertilizantes, pesticidas, maquinaria y mano de obra. Cualquier proceso específico para cultivar papas queda definido por la lista de recursos requeridos para cada quintal, acre, o cualquier otra unidad conveniente, que se use.

Supóngase que el productor conoce la cantidad 1, 2, ... n de cada recurso que se necesita para producir una unidad de cada proceso 1, 2, ... m. Así se encuentra con una tabla (matriz) de n filas y m columnas. La cifra a en la fila i y la columna j, digamos aij, representa la cantidad del recurso i, necesaria para producir una unidad del proceso j.

Suponemos que las relaciones **input-output** son lineares y aditivas, por ejemplo que para una combinación de k1 unidades del proceso 1, k2 unidades del proceso 2, ... , y km unidades del proceso m, se necesitaría (k1 ai1 + k2 ai2 + ... + km aim) unidades del recurso i.

Además suponemos que el productor conoce (o puede estimar) el ingreso neto anticipado a obtenerse, de una unidad de cada uno de los m procesos. Podemos denominar a estos ingresos r1, r2, ... , rm.

Finalmente, suponemos que el productor tiene una cantidad limitada de cada uno de los n recursos. Denominamos a estos recursos S1, S2 . . . . . . Sn.

El problema del productor, dados los valores aij, rj, y Si, es determinar la combinación posible de procesos más ventajosa. Una combinación es posible cuando cumple dos condiciones: primero no debe demandar más de lo disponible de cualquiera de los n recursos, y, segundo no deberá incluir una cantidad negativa de cualquier proceso.

La mayor parte de los hombres de negocios (incluyendo los agricultores) enfrentan este problema, preparando algún tipo de presupuesto consistente en una combinación determinada de procesos. Tal presupuesto muestra una manera de emplear recursos, e indica la estimación del ingreso anticipado de esta combinación específica de recursos. Luego cualquier empresario inteligente tratará de ajustar el presupuesto ensanchando un proceso y contrayendo otro, o posiblemente eliminando un proceso y agregando otro, en la búsqueda de las combinaciones de más alto rendimiento. Este es el proceso de la programación. La técnica de programación linear ofrece una manera sistemática de descubrir la combinación más ventajosa entre todas las posibles.

2.—ANALISIS DE UN EJEMPLO

Para concretar el problema, analicemos un problema específico dado por King y Freund (6), (7). Este es un ejemplo típico de un problema de administración de una granja.

Los datos del cuadro I muestran las cantidades necesarias de cada uno de $n = 9$ recursos por una unidad (por ejemplo un acre de cultivo o una cabeza de ganado para desposte) de cada uno de $n = 6$ procesos. (La no exigencia de mano de obra para carne de res está basada en el supuesto de que la mano de obra de la granja podría hacer el trabajo en períodos de ocio).

CUADRO I

DATOS PARA PROGRAMACION EN UNA GRANJA EN CAROLINA DEL NORTE

RECURSOS	UNIDAD	Recursos N°. i=1, 2, 3...9	Procesos : j = 1 ....6 PAPAS (1)	MAÍZ (2)	SOYA (3)	CARNE DE RES (4)	COL DE OTOÑO (5)	LECHUGA DE OTOÑO (6)	RECURSOS DISPONIBLES (Si)
Tierra de Primavera	Acres	(1)	1	1	1	2	0	0	60
Tierra de Otoño	Acres	(2)	0	1	1	2	1	1	60
Capital de Producción	Dólares	(3)	99.40	37.75	19.75	54.40	74.75	53.00	2.000
Mano de Obra E—F (+)	Horas	(4)	2.400	1.540	0	0	0	0	351
M—A	»	(5)	2.000	1.960	0	0	0	0	448
M—J	»	(6)	1.800	3.300	5.330	0	0	0	479
J—A	»	(7)	0	0	2.070	0	8.700	0	388
S—O	»	(8)	0	0	0.436	0	19.100	12.363	424
N—D	»	(9)	0	3.000	0.364	0	9.100	26.737	359
Ingreso Neto	Dólares	(rj)	83.40	72.35	27.30	72.05	207.25	455.00	

(+) Enero, Febrero, etc.

Un agricultor de Carolina del Norte podría preparar una forma de presupuesto (o programa) a base de las cifras en el cuadro I. Podría observar el hecho de que el ingreso neto derivado de un acre de lechuga de Otoño resultaría grande en relación al valor que se requiere para su producción. Pero no dedicaría 60 acres a la lechuga porque no tiene suficiente capital ni mano de obra para los meses de otoño. Por consiguiente podría empezar su programa posiblemente con 10 acres de lechuga de otoño agregando "otras empresas" (procesos) para emplear algunos de los recursos no utilizados por la lechuga. El agricultor de nuestro ejemplo, programaría muy posiblemente varios presupuestos provisionales y al fin se decidiría por el que estime rinde el máximo ingreso neto anticipado.

Este método de "análisis de presupuestos" es muy conocido por los especialistas en administración de granjas y por muchos agricultores.

La programación linear no es más que un análisis sistemático que conduce al presupuesto con el que se obtiene el ingreso neto máximo.

3.—EL CUADRO TRANSFORMADO

En nuestro método abreviado de cálculo de la programación linear, preferimos empezar con una tabla que indica la proporción de los recursos disponibles que se necesitan para obtener una cantidad arbitrariad e ingresos, digamos dólares. Así en vez de aij, preferimos emplear:

$$(1) \qquad bij = \frac{aij}{Si \, . \, rj} \, d$$

Utilizando la ecuación (1) podemos calcular otro cuadro como el cuadro II. Por ejemplo al transformar los datos en el Cuadro I, la cifra en la fila 3, columna 1 es

$$b31 = \frac{99.40 \quad (10,000)}{2,000 \quad (83.40\ )} = 5.9592;$$

puesto que d es un valor absolutamente arbitrario hemos tomado d = 10,000 para conseguir un número conveniente de cifras decimales en el Cuadro II.

Nótese que en el Cuadro II hemos aproximado las bij hasta la cuarta cifra decimal. La exactitud de los últimos decimales es dudosa, pero tomamos aproximadamente dos decimales más para evitar los errores en el redondeo durante el análisis.

CUADRO II

PROPORCION DE RECURSOS REQUERIDOS PARA PRODUCIR $ 10.000 DE INGRESO NETO

Procesos

RECURSOS	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1)	1.9984	2.3036	+ 6.1050	+ 4.6264		
(2)		2.3036	+ 6.1050	+ 4.6264	0.8042	0.3663
(3)	+ 5.9592	2.6088	3.6172	3.7752	1.8034	0.5824
(4)	0.8199	0.6064				
(5)	0.5352	0.6047				
(6)	0.4506	0.9522	4.0760			
(7)			1.9542		1.0819	
(8)			0.3767		+ 2.1736	0.6408
(9)		1.550	0.3714		1.2231	+ 1.6368

4.—EL PROCESO MAS VENTAJOSO

Podemos utilizar los valores bij para descubrir rápidamente el proceso que rinda la máxima utilidad, y para averiguar cuándo es o no conveniente considerar combinaciones de dos o más procesos. Este análisis no debe tomar más de dos minutos.

La multiplicación (división) de todas las cifras contenidas en el Cuadro II por un número cualquiera da la proporción de recursos disponibles necesarios para producir un ingreso neto de $ 10,000 multiplicado (dividido) por el mismo número. Por ejemplo al doblar todas las entradas el resultado obtenido es la proporción de recursos disponibles necesarios para obtener un ingreso neto de $ 20,000.

La cifra mayor en cada columna indica el recurso limitante para cada uno de los procesos. Así la cifra mayor en la columna 1 es b31 = 5.9592. En este caso es el recurso 3 el que pone la limitación al proceso 1. El ingreso neto máximo del proceso 1 es $ 10,000/5.9592 = 1,678.

El agricultor podría estar mucho mejor con el proceso 2. En este caso el número máximo en la columna es b32 = 2.6088. El agricultor podría obtener un ingreso neto de $ 10,000 /2.6088 = $ 3,833 al utilizar todo lo que dispone del recuso 3 para llevar a cabo el proceso 2.

Cabe aclararse en este punto que el proceso individual que dé la máxima utilidad se identifica por el **mínimo máximo,** es decir, por el valor mínimo comparando los valores máximos de las columnas.

Hemos indicado con un asterisco el elemento máximo de cada columna en el cuadro II. Es fácil ver que el mínimo máximo es b96 = 1.6368. Este número significa que para conseguir $ 10,000 de ingreso del proceso 6 (lechuga de otoño) el agricultor necesitaría 1.6368 veces lo que dispone del recurso 9 (mano de obra N—D). Si emplea todo el recurso 9 en el proceso 6 puede esperar un ingreso neto de $ 10,000/1.6368 =

6,109. Este ingreso es mayor de lo que se podría esperar de cualquier otro proceso individual.

Observamos poco después que cada uno de los cinco procesos restantes utiliza en forma más efectiva el recurso 9 que el proceso 6. Esto se indica por el hecho de que todos los demás elementos de la fila 9 son menores que b96 = 1.6368. El agricultor obtendría entonces, una mayor utilidad al combinar el proceso 6 con cualquiera de los cinco procesos restantes, haciendo así uso más efectivo del recurso 9.

5.—LA COMBINACION MAS VENTAJOSA DE DOS PROCESOS

Si la especialización en un proceso no es el programa más ventajoso, evidentemente tendremos que considerar combinaciones posibles de por lo menos dos procesos. En general podemos encontrar combinaciones de dos procesos que utilicen todas las cantidades disponibles de al menos dos recursos. La combinación de dos recursos que rinda la utilidad máxima no incluirá necesariamente el proceso individual que dió la utilidad máxima ni utilizará necesariamente toda la cantidad disponible del recurso que representó el factor limitante del proceso individual más ventajoso. En principio tenemos que considerar m (m — 1)/2 como número de posibles combinaciones de dos procesos, y encontrar cuál de ellas rinde la mayor utilidad.

Esto puede parecer muy ambicioso. Sin embargo muchos casos prácticos se pueden resolver rápida y fácilmente. En nuestro ejemplo numérico, la combinación más ventajosa de dos procesos se determinó en menos de cinco minutos, empleando el análisis gráfico.

Antes de pasar directamente al estudio de los cuadros empleados en este análisis, puede ser de alguna ayuda ilustrar algunas de las propiedades generales de tales diagramas. Con este motivo solamente presentamos la gráfica 1.

Sobre los ejes verticales a la izquierda y a la derecha se representan gráficamente las respectivas proporciones de los recursos disponibles requeridos por los procesos individuales 4 y 5. Se unen los puntos correspondientes en los dos ejes por líneas rectas que las denominaremos líneas de recursos requeridos. En la tabla II se notará que ninguno de los dos procesos requiere de los recursos 4, 5 y 6; por lo tanto la línea horizontal en la base de la gráfica representa simultáneamente las necesidades de estos tres recursos.

Para conseguir un ingreso neto de $ 10,000 del proceso 4 el agricultor necesitaría 4.6264 veces lo que dispone de los recursos 1 y 2. El proceso 5 necesitaría 2.1736 veces lo que dispone del recurso 8. Si usara los dos procesos en proporciones iguales necesitaría (4.6264 + 0)/2 = 2.3132 veces de lo que dispone del recurso 1, (4.6264 + 0.8042)/2 = 2.7153 veces de lo que dispone del recurso 2, (0 + 2.1736)/2 = 1.0868 veces de lo que dispone del recurso 8, y así en adelante de los demás requerimientos. Estas necesidades para una combinación 50% y 50% de los procesos 4 y 5 corresponde al punto medio de las necesidades de los recursos mostrados en la gráfica 1. En la gráfica es evidente (también por cálculos basados en el cuadro II) que el recurso limitante para una combinación 50% y 50% de los procesos 4 y 5 es el recurso 3, aunque no es limitante para ninguno de estos procesos separadamente. Esta combinación dará un ingreso neto de $ 10,000/(3.7752 + 1.8034)/2 = 3.585. Evidentemente esta combinación de estos dos recursos no es el programa óptimo puesto que el proceso 5 sólo, rinde un ingreso neto de $ 10.000/2.1736 = $ 4,601; este resultado es lógico por el hecho que el punto medio de la línea de requerimientos más alta (3) está por encima del requerimiento más elevada (8) en el eje del proceso 5.

Una combinación cualquiera de dos procesos correspondientes a un punto cualquiera en el eje horizontal entre los procesos 4 y 5 está abierta al agricultor. Para cada combinación la

RECURSOS QUE SE NECESITA PARA LAS COMBINACIONES DE LOS PROCESOS 4 Y 5

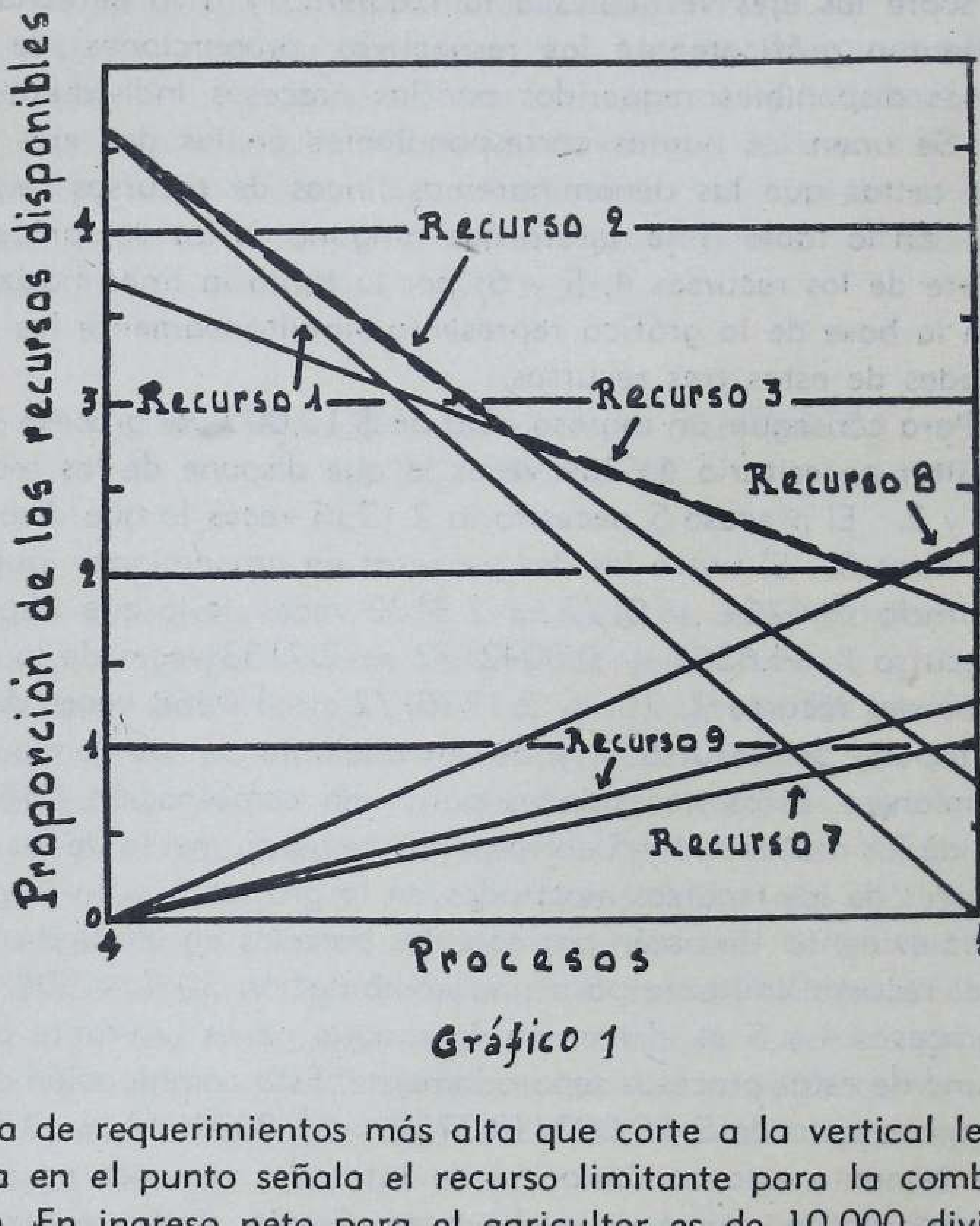

Gráfico 1

línea de requerimientos más alta que corte a la vertical levantada en el punto señala el recurso limitante para la combinación. En ingreso neto para el agricultor es de 10,000 dividido por la "proporción de recursos requeridos para obtener un ingreso neto de $ 10,000 que se encuentra indicada en el eje vertical correspondiente al recurso limitante" (es decir el más alto). Así, lo mejor que puede hacer el agricultor es moverse a lo largo de la línea de puntos en la parte superior de la gráfica. Para dos procesos cualesquiera, digamos 4 y 5 deseamos el punto de intersección mínimo entre dos líneas de recursos cualesquiera, que no tenga directamente por encima de él ninguna otra línea de recursos requeridos. Evidentemente esto nos dará el mínimo divisor de los $ 10,000 y por lo mismo el máximo ingreso neto posible. La gráfica 1 muestra que la intersección entre las líneas de requerimientos 3 y 8 que corresponde aproximadamente a la combinación 10% y 90% de los procesos 4 y 5 da por resultado el ingreso neto más alto empleando solamente estos dos procesos.

Sin embargo este ingreso neto puede incrementarse, al considerar combinaciones de otros pares de procesos. Procedamos a examinar únicamente aquellas combinaciones de procesos que son competitivos del mejor par posible; esto es, aquellos dos procesos que tienen la intersección más baja entre las líneas de recursos requeridos limitantes del par.

La gráfica 2 analiza tres de las 15 posibles combinaciones de dos procesos. Son 2 y 6, 4 y 6, 5 y 6. En dos de los tres casos hemos enseñado solamente dos líneas porque una mirada a la tabla II mostrará fácilmente que en estos casos la intersección de las dos líneas mostradas es la más alta posible para ese par de procesos. Para los procesos 4 y 6 hemos indicado tres líneas de recursos 2, 3 y 9. La única decisión en todo el análisis que fué difícil tomar en una ojeada fué si los recursos limitantes eran 2 y 9 o 3 y 9 para una combinación de los procesos 4 y 6. En efecto, estas forman prácticamente un nudo señalado por el hecho de que todas estas líneas se interseptan casi en el mismo punto. Pero un estudio detallado de las tres partes de la gráfica 2 muestra que la más baja de las interseciones máximas es para una combinación de aproximadamente el 20% del proceso 4 y el 80% del proceso 6, requiriendo aproximadamente 1.3 veces los montos disponibles de los recursos 2 y 9. Observando los datos en la tabla II, podemos ver que es un mínimo — máximo (es decir, si tomamos combinaciones de cualquier otro par de procesos la intersección más alta sería mayor que 1.3).

Así la combinación más ventajosa de dos procesos es aquella que incluye justamente lo suficiente de la combinación de aproximadamente 20% y 80% de los procesos 4 y 6 para emplear todas las cantidades disponibles de los recursos 2 y 9. Los recursos 2 y 9 juntos llegan a ser los factores limitantes.

METODO PARA ENCONTRAR LA COMBINACION MAS VENTAJOSA DE DOS PROCESOS

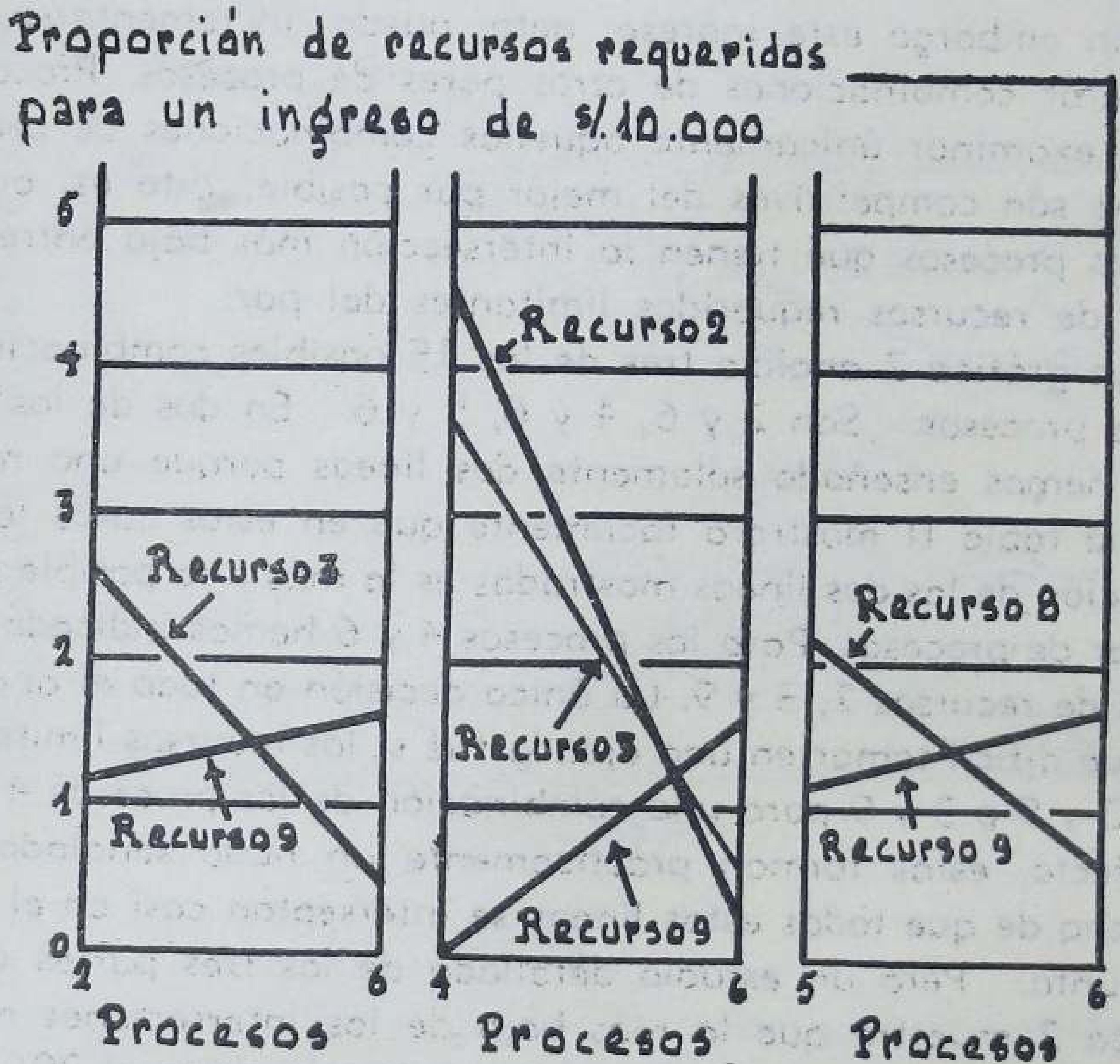

Gráfico 2

6.—METODO PARA AVERIGUAR SI CONVIENE AGREGAR UN TERCER PROCESO

Necesitamos luego determinar si una combinación de tres o más procesos podría ser más ventajosa. Anotemos que el proceso 1 no emplea ninguno de los recursos que limita la combi-

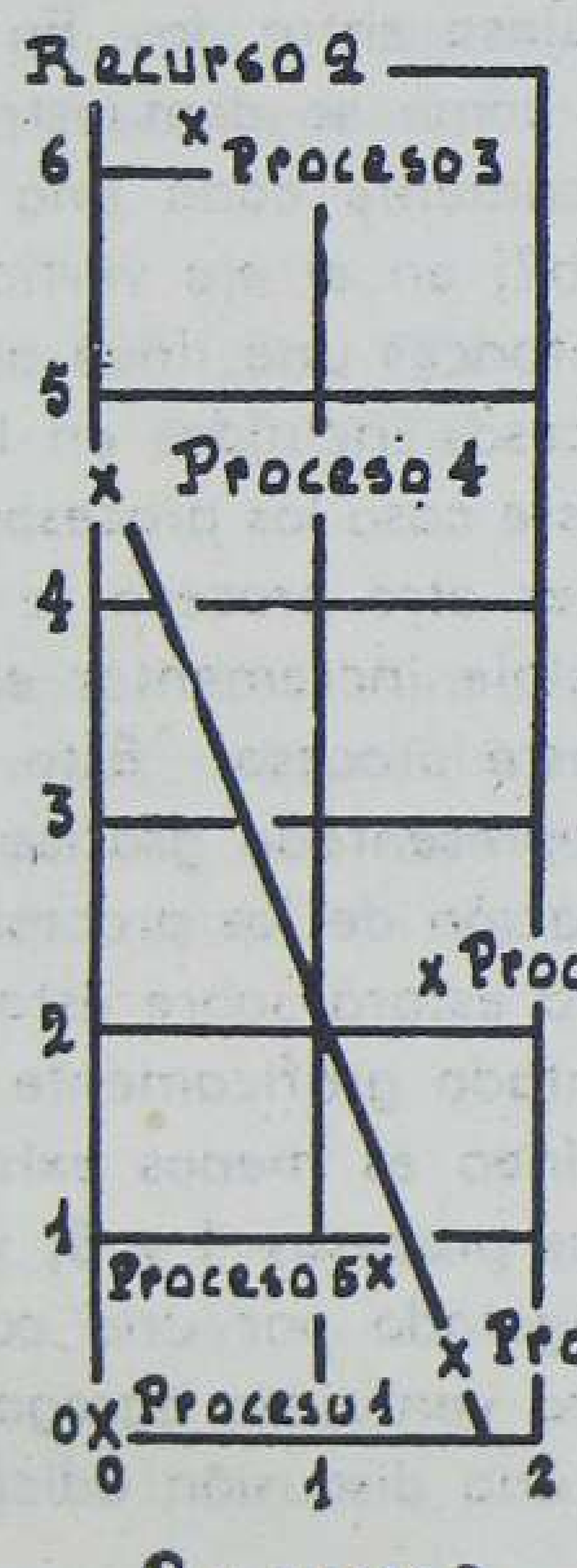

Gráfico 3

nación de los procesos 4 y 6 esto es los procesos 2 y 9. Así una combinación de los procesos 1, 4 y 6 dará un ingreso mayor que los procesos 4 y 6 solos. Puede que valga la pena anotar que esto es cierto en general para cualquier proceso que no utilice ninguno de los recursos. La producción a través del proceso 1, sin embargo, junto con la combinación óptima de dos procesos (4 y 6) habría estado severamente restringida si hubiese requerido algo del recurso 3, una vez que la combinación mejor de 4 y 6 casi agota el recurso 3, así como también todos los recursos limitantes 2 y 9. Aunque es fácil verlo en el caso de nuestro ejemplo, en otros casos sería más difícil determinar si recompensará agregar un tercer proceso después de encontrar la combinación más ventajosa entre dos. En general, esto puede hacerse gráficamente, como se demuestra en la gráfica 3.

Representamos gráficamente cada uno de los 6 procesos en la figura 3 midiendo b2j en el eje vertical y b9j en el eje horizontal. Dibujamos entonces una línea a través de los puntos representando los procesos incluídos en la combinación óptima de dos procesos, en este caso los procesos 4 y 6. Si el punto que representa cualquier otro proceso se encuentra por debajo de esta línea, es posible incrementar el ingreso neto mediante la agregación de este proceso. Esto es evidente por el hecho de que el punto representado gráficamente que corresponde a cualquier combinación de los procesos 4 y 6 para producir un ingreso de 10,000 estará sobre esta línea. En cambio, cualquier proceso representado gráficamente por un punto que esté por debajo de esta línea es menos exhaustivo de los dos recursos limitantes para los procesos 4 y 6; y porque su propio recurso limitante no es agotado por una combinación posible de los procesos 4 y 6, será ventajoso agregar o substituir este proceso (Véase [8] para una discusión adicional de este principio).

En nuestro ejemplo la agregación del proceso 5 aumentará el ingreso, aunque muy poco, pero el proceso 1 lo incrementaría más. Aparentemente, entonces, necesitamos considerar una combinación de los procesos 1, 4 y 6. Cuando agreguemos el proceso 1, aparentemente el recurso 3 será el recurso limitante. Así que haríamos bien en probar una combinación de los procesos 1, 4 y 6 que utilizaría totalmente los recursos 2, 3 y 9. (Nótese que ésta no es necesariamente la combinación más ventajosa de tres procesos. Será más ventajosa que la óptima combinación de dos procesos. Más la combinación óptima entre tres procesos puede no incluir el proceso 4 o el proceso 6).

Es más fácil atar un nudo que dar las instrucciones para hacerlo, así también, es más fácil llevar a cabo el análisis indicado arriba que describirlo. En efecto, después de que la tabla II estuvo preparada, completamos en 10 minutos aproximadamente todo el análisis hasta este punto. Naturalmente, para ello, dibujamos a lápiz gráficas provisionales —no las gráficas que cuidadosamente dibujadas reproducimos en este artículo—.

7.—ANALISIS DE UNA COMBINACION DE TRES PROCESOS

Considérese una combinación de los procesos r, s y t, empleando todos los recursos disponibles u, v y w.

Podemos determinar qué cantidad de cada proceso debe incluirse mediante la resolución de las tres ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} (2) \qquad bur\ qr + bus\ qs + but\ qt &= 1 \\ bvr\ qr + bvs\ qs + bvt\ qt &= 1 \\ bwr\ qr + bws\ qs + bwt\ qt &= 1 \end{aligned}$$

Imagínese ahora un diagrama similar al de la gráfica 3 en tres dimensiones. El proceso j estaría representado gráficamente mediante la medida de las distancias buj, bvj y bwj en los tres ejes perpendiculares uno al otro. Dicho plano contendrá todos los tres puntos representados correspondientes a los procesos r, s y t, así como también todas las combinaciones de estos tres procesos que produzcan ingresos de $ 10,000. Para representar todas las combinaciones posibles, este plano, naturalmente, debe tener intersecciones positivas en todos los tres ejes de recursos limitantes. La ecuación del plano a través de las coordenadas de los procesos r, s y t puede encontrarse resolviendo las tres ecuaciones simultáneas:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} bur\ cu + bvr\ cv + bwr\ cw &= 1 \\ bus\ cu + bvs\ cv + bws\ cw &= 1 \\ but\ cu + bvt\ cv + bwt\ cw &= 1 \end{aligned}$$

Las ecuaciones (2) y (3) pueden resolverse mediante un método apropiado. El método más sencillo es invertir la matriz.

$$\text{(4)} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} bur & bus & but \\ bvr & bvs & bvt \\ bwr & bws & bwt \end{bmatrix}$$

Las sumas de las filas de B_3^{-1} darán los valores de qr, qs y qt en la ecuación (2). Las sumas de las columnas de B_3^{-1} darán los valores de cu, cv y cw en la ecuación (3). Además como se explica más completamente en (6) pero como debe ser claro por nuestra discusión del análisis gráfico, las sumas de las filas y de las columnas son valiosas para un análisis posterior.

Todas las sumas de las filas de B_3^{-1} deben ser positivas para una solución posible. Si cualquiera suma de las filas fuere negativa, indicaría que el productor podría conseguir un mayor ingreso al abandonar uno de los tres procesos; r, s o t. Finalmente, las C encontradas al resolver las ecuaciones (3) pueden emplearse para determinar si se debería aumentar o sustituir cualquiera otro proceso. Sencillamente calculamos para el proceso j.

$$(5) \qquad Wj = Cu\ buj + Cv\ bvj + Cw\ bwj$$

Wj será 1.0 cuando j = r, s o t (los procesos en nuestro caso). Si para cualesquiera j = r, s o t, Wj < 1.0, el proceso j debe aumentarse o sustituirse.

Aplicando estos principios a nuestro ejemplo numérico, con los otros procesos, 1, 4 y 6, empleando todos los recursos 2, 3 y 9 la matriz B_3, obtenemos:

$$B_3 = \begin{array}{c} \\ (2) \\ (3) \\ (9) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1) & (4) & (6) \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 4.6264 & 0.3663 \\ 5.9592 & 3.7752 & 0.5824 \\ & & 1.6368 \end{bmatrix} \end{array}$$

En este caso resulta que es muy fácil invertir B_3. Si se intercambian las filas 1 y 2 la matriz sería triangular. Por lo común esto no sucederá. Procedemos a invertir B_3. y encontramos.

$$
B_3^{-1} = \begin{array}{c} \\ (2) \\ (3) \\ (9) \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1) & \quad (4) & \quad (6) \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc} -0.1370 & 0.1678 & -0.0290 \\ 0.2162 & & -0.0484 \\ & & 0.6109 \end{array} \right] \end{array}
\begin{array}{c} \text{Suma de filas} \\ 0.0018 \\ 0.1678 \\ 0.6109 \end{array}
$$

Suma de columnas 0.0792 0.1678 0.5335

Esta combinación es posible porque todas las sumas de las filas son positivas. No se debe eliminar ningún proceso, porque todas las sumas de las columnas son positivas. Después aplicamos la ecuación (5) a cada uno de los 6 procesos, con c1 = 0.0792, c2 = 0.1678 y c3 = 0.5335. Los resultados son:

W1 = 1.000; W2 = 1.236; W3 = 1.289;
W4 = 1.000; W5 = 1.019; W6 = 1.000

El hecho de que W1 = W4 = W6 = 1.000 sólo confirma la exactitud de las C. Anotamos que W2, W3 y W5 son cada una mayores de 1.000. Esto indica que no será ventajoso aumentar cualquiera de los otros procesos ni el sustituirlo por cualquiera de los procesos en el subgrupo. El ingreso neto de esta combinación es (0.0018 + 0.1678 + 0.6109) /10,000 = $ 7,805. Recordamos que el proceso individual más ventajoso daría un ingreso neto de $ 6,109 y que el mayor ingreso posible derivado de una combinación de dos procesos es $ 7,788.

Por consiguiente nuestro análisis ha terminado. Hemos encontrado la combinación más ventajosa de procesos. Faltaría presentar nuestros resultados en forma más útil. Empleando q2 = 0.0018; q3 = 0.1678, q9 = 0.6109 con los datos en el cuadro II conseguimos las proporciones de recursos limitantes usados en cada proceso como se demuestra en el cuadro III.

O multiplicando la primera fila del cuadro III por 60, la segunda por 2.000 y la tercera por 359 (datos del cuadro I) podemos poner los resultados en términos de las unidades originales. Así obtenemos el cuadro IV.

De manera similar podríamos encontrar fácilmente qué cantidad de cada recurso se necesitaría para la combinación de procesos propuesta. El agricultor usaría 46.8 acres de tierra de primavera, dejando 13.2 acres ociosos. Se cultivaría papas en 0.2 acres y se usaría 46.6 acres para el pastoreo del ganado vacuno.

Los 46.6 acres para ganado vacuno nos llevan a una pregunta práctica. Esta extensión mantendrá a 23.3 animales y los otros cinco procesos (cultivos) pueden subdividirse a voluntad. El agricultor puede cultivar 0.2 acres de papas, por ejemplo, pero no puede criar 0,3 cabezas de ganado vacuno, ni 23.3 de tal recurso. En este caso, la contestación práctica para el agricultor de Carolina del Norte es la de criar 23 cabezas de ganado vacuno (no 23.3). Esto le permitiría un aumento muy pequeño de papas, aunque casi no lo suficiente para preocuparse en este caso. La contestación práctica es 0,2 acres de papas, 23 cabezas de ganado vacuno y 13.4 acres de lechuga de otoño.

CUADRO III

PROPORCIONES DE LOS RECURSOS LIMITANTES USADOS EN CADA PROCESO

RECURSOS	Procesos (1)	(4)	(6)	TOTAL
(2)		0.7763	0.2327	1.000
(3)	0.0107	0.6334	0.3559	1.000
(4)			1.0000	1.000

CUADRO IV

RECURSOS USADOS EN CADA PROCESO

Procesos

RECURSOS	PAPAS (1)	CARNE (4)	LECHUGA DE OTOÑO (6)	TOTAL
Acres de Tierra Otoño (2)		46.6	13.4	60
Dólares de Capital (3)	21	1,267	712	2,000
Horas Trabajo N-D (9)			359	359

EL CASO GENERAL

Hemos demostrado cómo se puede analizar un ejemplo sencillo rápida y completamente sin emplear la usual tabla de trabajo simplex. Nuestro método podría ser usado para el análisis completo de algunos problemas un poco más complicados, posiblemente requiriendo cuatro o cinco procesos para la combinación de mayor rendimiento. Así si una de las Wj en nuestro ejemplo hubiera sido menor de 1.0, podríamos ver intuitivamente qué procesos habría que incluir en una combinación de cuatro procesos y cuáles serían los cuatro factores limitantes. Si nuestra intuición fuese buena, podríamos proceder a dar un paso más.

En análisis más complicados haríamos bien al emplear la tabla de trabajo simplex. Sin embargo, podemos utilizar el método aquí descrito para reemplazar las primeras dos o tres iteraciones, empezando con un grupo de dos o tres procesos reales y (n — 2) o (n — 3) "actividades disponibles".

Servicio de Mercadeo Agrícola.

REFERENCIAS:

(1) Charnes, A., W. W. Cooper, y A. Henderson: Una introducción a la programación linear. New York: John Wiley & Sons, 1953.

(2) Dantzig G. B.: "Maximización de una forma linear cuando las variables están sujetas a un sistema de desigualdades lineales" Mimeografiado. Fuerzas Aéreas de los Estados Unidos. Noviembre, 1919.

(3) ....: Análisis por actividades de la producción y distribución, T. C. Koopmans, Ed. New York, John Wiley & Sons, 1951, Capítulo XXI y XXIII.

(4) Dorfman, Robert: Aplicación de la programación lineal a la teoría de la empresa. Berkeley: Editorial de la Universidad de California.

(5) ....: Análisis por actividades de la producción y distribución op. cit. Cap. XXII. (El excelente artículo del Sr. Dorfman "Programación Linear o Matemática" American Economic Review, Diciembre 1953 da una sencilla y buena presentación de los principios con pocas matemáticas).

(6) King, R. A. y R. J. Freund: "Un procedimiento para resolver un problema de Programación Linear" Journal Paper Nº 563. Estación Experimental Agrícola de Carolina del Norte.

(7) King, R. A.: "Algunas aplicaciones en Economía Agrícola del Análisis por Actividades". Journal of Farm Economics, Diciembre, 1953.

(8) Koopmans, T. C.: Análisis por actividades de la producción y distribución. Op. Cit. Introducción.

(9) Waugh Frederick V.: "La Alimentación de Ganado Lechero con costo mínimo ("Una aplicación de la Programación Linear") Journal of Farms Economics, Agosto, 1951.