

# Modelación y simulación numérica del transporte de petróleo por el Sistema de Oleoducto Transecuatoriano

## Modeling and numerical simulation of oil transportation by the Transecuatorian Oil Pipeline System



**Hernán Guillermo Benalcázar Gómez**

Matemático), Doctor en Ciencias Ph.D. Docente en la Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática de la Universidad Central del Ecuador.

**Iván Christian Naula Reina**



Ingeniero Matemático e Informático, Magister en Estadística Aplicada, Doctorante en Ciencias de la Computación. Docente en la Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática de la Universidad Central del Ecuador.

**Carlos Fabián Izurieta Cabrera**



Ingeniero Matemático e Informático, Magister en Estadística Aplicada, Doctorante en Ciencias de la Computación. Docente en la Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática de la Universidad Central del Ecuador.



**Guillermo Alexis Albuja Proaño**

Ingeniero Matemático e Informático, Magister en Matemáticas Puras y Aplicadas, Doctorante en Ciencias Matemáticas. Docente en la Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática de la Universidad Central del Ecuador.



**René Alfonso Carrillo Flores**

Ingeniero Informático, Magister en Ingeniería Industrial, Doctorante en Ciencias Informáticas. Docente en la Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática de la Universidad Central del Ecuador y en la Escuela de Informática y Multimedia de la Universidad Internacional del Ecuador.

## Resumen

Las ciencias fácticas establecen procesos y modelos matemáticos que permiten explicar un cúmulo de condiciones y situaciones de la realidad; uno de ellos, ha sido implementado mediante la aplicación de recursos tecnológicos, tal es el caso del presente artículo en donde se establece como objetivo de investigación el simular el transporte de crudo por el Sistema de Oleoducto Transecuatoriano (SOTE), aplicando un procedimiento metodológico fundamentado en la elaboración de un modelo matemático, esquema numérico, diseño de algoritmos y desarrollo de programas computacionales, cuya implementación permite como resultado, la obtención de un "simulador de transporte de petróleo en un oleoducto con un fluido isotérmico con dilución, gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales". Este modelo se basa en los principios de la mecánica de fluidos y la hidráulica de tuberías. La solución presión-velocidad de estas ecuaciones es aproximada con el método de diferencias finitas centrales del cual se obtiene un esquema numérico estable. Así se concluye, que el procedimiento desarrollado contribuye a la generación de escenarios virtuales que permiten simular el transporte de crudos pesados mediante la mezcla con crudos más livianos o diluyentes a través del SOTE, de esta manera se minimiza el riesgo de afectación del Sistema de Oleoducto Transecuatoriano y el impacto ambiental.

**Palabras clave:** oleoducto; modelo matemático; diferencias finitas centrales; esquema numérico; mecánica de fluidos; transporte de petróleo pesado; hidráulica de tuberías

**Abstract:** The factual sciences establish mathematical processes and models which allow explaining a wide number of conditions and situations on everyday life; One of them, has been implemented through the application of technological resources, such as the case presented on this article where it is established as the research objective to simulate the transport of oil by the Trans-Ecuadorian Pipeline System (SOTE), applying a methodological procedure based on the elaboration of a mathematical model, numerical scheme, design of algorithms and development of software, which implementation allows, as a result, the obtaining of an "oil transport simulator in an oil pipeline with an isothermal fluid with dilution, guided by a system Of differential equations". This model is based on the principles of laws of and piping hydraulics. The pressure- velocity solution of these equations is approximated due the method of central finite differences from which a stable numerical scheme is obtained. That is how, it is concluded that the procedure developed contributes to the generation of virtual scenarios that allow simulating the transport of heavy crude by mixing with lighter crude or diluents through the SOTE, thus minimizing the risk of affecting the Pipeline System Trans-Ecuadorian and the environmental impact.

**Keywords:** oil pipeline; mathematical model; finite central differences; numerical scheme; fluid mechanics; transport of heavy oil; pipeline hydraulics

## Introducción

El transporte de crudo en el Ecuador constituye una actividad imperiosa, sobre todo al considerar que la totalidad del crudo proviene de la región amazónica. El país cuenta con dos oleoductos: el Oleoducto de Crudos Pesados (OCP), que es privado, destinado a la transportación de crudo pesado; y, el SOTE, un oleoducto de propiedad del Estado ecuatoriano, que se diseñó en los años 70 para transportar crudos livianos. La Sociedad del siglo XXI exige buscar alternativas que faciliten la transportación de crudos pesados por la infraestructura del SOTE. Para esto se conoce dos opciones: la primera que consiste en calentar el crudo para disminuir su viscosidad, y la segunda, consiste en diluir el crudo pesado con otro de menor viscosidad o con diluyente. Dentro de lo expuesto, pensar en la experimentación física de este método de transporte en el SOTE no es posible; debido a los altos riesgos de ruptura del oleoducto, lo que implica serios problemas de contaminación ambiental y su posterior remediación. A partir de estos antecedentes, es necesario disponer de un simulador matemático que permita experimentar el transporte de crudos pesados por el SOTE, mismo que considera aspectos tales como: caídas de presión, cambios de temperatura y los esfuerzos que se producen en la tubería, todos estos son simulados mediante la ejecución de programas computacionales basados en algoritmos a partir de métodos numéricos de aproximación de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Esto es factible gracias a la modelización matemática fundamentada en las leyes de la mecánica de fluidos, la hidráulica de tuberías y bombas centrífugas; así también, a los avances permanentes del análisis numérico de ecuaciones en derivadas parciales y al procesamiento digital de imágenes.

## Objetivos

- Diseñar un modelo matemático basado en ecuaciones de movimiento y de continuidad.
- Aproximar la solución del modelo matemático, mediante el esquema numérico fundamentado en diferencias finitas centrales
- Elaborar un programa computacional, que bajo condiciones de viscosidad del crudo, caudal, condiciones iniciales de bombeo y estructurales del oleoducto, permita simular el transporte de crudo a través del SOTE.

## Metodología

La construcción del modelo matemático se fundamenta teóricamente en las ecuaciones de movimiento y de continuidad; la primera determina la condición

de un objeto en función de la velocidad, aceleración, masa y otras variables función que afecta su movimiento; es decir define la evolución temporal de un sistema físico en un espacio; y la segunda expresa la conservación de la masa de manera numérica y en forma diferencial (aplicada al caso de investigación).

Un modelo matemático de flujo inestable e isotérmico en una tubería, se obtiene mediante: la aplicación de la segunda ley de Newton, la conservación de masa, leyes de comportamiento y de información experimental. La dinámica del fluido en la tubería se expresa en términos de presión  $p(x, t)$  y velocidad  $v(x, t)$  que son funciones de la posición y del tiempo. Los modelos a obtener son el resultado de la aplicación de ecuaciones diferenciales unidimensionales, siendo estas simplificaciones de modelos tridimensionales, que se resuelven, usando un esquema numérico y algoritmo computacional que simula el transporte del crudo por el SOTE.

El proceso constructivo del modelo matemático se encuentra descrito en una metodología sistemática, lógica y deductiva, que refleja su integralidad y alcance.

## Ecuación de movimiento

Se considera un volumen de control  $\Omega(t)$  constituido por una porción de fluido en la tubería de sección transversal de área  $A$  y longitud  $\delta x$ . En este dominio se toman dos puntos referenciales notados con 1 y 2 de  $\Omega(t)$ , como se muestra en la figura 1

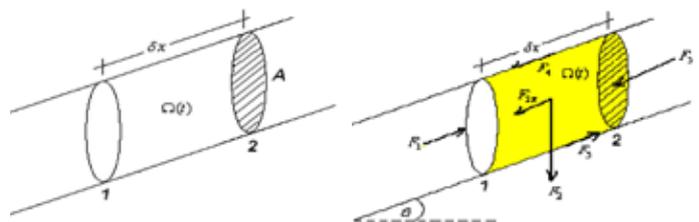


Fig 1. Secciones transversal con área y diagrama de fuerzas.

Las fuerzas que obran en este elemento de fluido son:  $F_1$  fuerza ejercida sobre la sección 1 debida a la presión, esto es,  $F_1 = pA$ , donde  $p$  es la presión y  $A$  es el área de la sección transversal;  $F_2$  es la fuerza debida al peso del fluido, la misma que se expresa como,  $F_2 = mg = \rho A \delta x g$  donde  $m$  es la masa del fluido,  $\delta$  su densidad y  $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$  el valor de la gravedad. Interesa su componente paralela al eje central de la tubería, que se le nota  $F_{2,x}$  y que está definida como  $F_{2,x} = pA \delta x g \text{ sen}(\theta)$ , donde  $\theta$  es el ángulo de inclinación del tubo respecto de la horizontal. A continua-

ción, la fuerza  $F_3$  ejercida sobre la sección 2 debida al cambio de presión respecto de la posición, definida como  $F_3 = pA + \frac{\partial}{\partial x}(pA)\delta x$ . La fuerza debida a la fricción  $F_4 = t_0 \rho D \delta x$ , donde  $t_0$  es el esfuerzo cortante,  $D$  el diámetro.

Por la fórmula de Darcy-Weisbach,  $t_0 = \frac{rf}{8} v|v|$ , con  $f$  el coeficiente de fricción. La fuerza ejercida por variación de la sección transversal  $F_5$  está definida como

$$F_5 = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \delta x.$$

Para mayor información referirse a [2], [6], [7].

Por la segunda Ley de Newton, se tiene:

$$F_1 - F_{2,x} - F_3 - F_4 + F_5 = ma = m \frac{dv}{dt}.$$

Remplazando los resultados precedentes, se obtiene la ecuación siguiente:

$$pA - \left( pA + \frac{\partial}{\partial x}(pA)\delta x \right) - \rho Ag \delta x \text{sen}(\theta) - \tau_0 \pi D \delta x + \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \delta x = \rho A \delta x \frac{dv}{dt}$$

Luego de algunas simplificaciones, la ecuación precedente se escribe como

$$-\frac{\partial}{\partial x}(pA)\delta x - \rho Ag \delta x \text{sen}(\theta) - \tau_0 \pi D \delta x + \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \delta x = \rho A \delta x \frac{dv}{dt}.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x}(pA) = p \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} A.$$

Reemplazando este resultado en la igualdad precedente y dividiendo para  $A \delta x$ , resulta

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \text{sen}(\theta) - \frac{\tau_0 \pi D}{A} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} = \rho \frac{dv}{dt}.$$

Para  $\delta x$  suficientemente pequeño, el término  $\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}$  es suficientemente pequeño por lo que es

despreciable, y la ecuación precedente se reduce a:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \text{sen}(\theta) - \frac{\tau_0 \pi D}{A} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \text{sen}(\theta) - \frac{f \rho}{2D} v|v|.$$

Además,  $\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}$  y dividiendo para  $r$ , se obtiene la siguiente ecuación de Euler:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{2D} v|v| = -g \text{sen}(\theta) \tag{1}$$

En la práctica la ecuación (1) es reemplazada por la ecuación ([2], [6], [7], [8]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{2D} v|v|^{\lambda-1} = -g \text{sen}(\theta) \tag{2}$$

donde  $1 < \lambda \leq 2$ .

En el caso de flujo estable,  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ , con lo que, la ecuación reduce a:

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{2D} v|v|^{\lambda-1} = -g \text{sen}(\theta) \tag{3}$$

Adicionalmente, si se considera la densidad  $r$  y el área  $A$  constantes, lo que implica  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , y de esta

resulta que la velocidad  $v$  es constante. La ecuación (3) se transforma en la siguiente

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -r g \text{sen}(\theta) - \frac{fr}{2D} v|v|^{\lambda-1},$$

de donde:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial p}{\partial x} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \left( \rho g \text{sen}(\theta) - \frac{f}{2D} v|v|^{\lambda-1} \right) dx$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p = -\rho g \Delta x \text{sen}(\theta) - \frac{f \Delta x \rho}{2D} v|v|^{\lambda-1},$$

con  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

Esta ecuación es equivalente a la ecuación de Darcy-Weisbach ([2], [6], [7], [8]): en la que se considera el perfil del oleoducto. La ecuación (4) es la ecuación de flujo de estado estable generalmente utilizada como la

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{2D} v|v|^{\lambda-1} = -g \text{sen}(\theta). \tag{4}$$

condición inicial en los modelos de flujo inestable e isotérmico. En la figura 3 se muestra la cabeza piezométrica  $H$  o línea de nivel hidráulico sobre un dato arbitrario, que puede reemplazarse por la presión  $p = \rho g(H - z)$ , donde  $z$  es función de  $x$  y re-

presenta la elevación del eje central del tubo.

Resulta

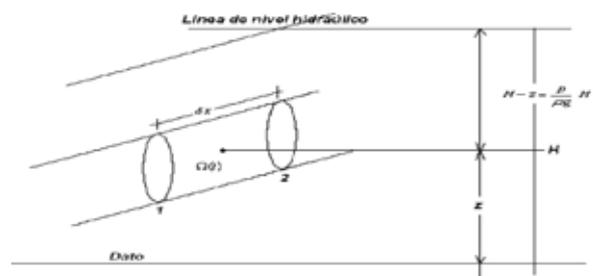


Fig 2. Sección transversal.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r g \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) = r g \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \text{sen}(\theta) \right). \quad (5)$$

Considera que  $v \frac{\partial v}{\partial x} \approx 0$  que es válido para flujos inestables de baja velocidad, la ecuación (1) se escribe como

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{2D} v |v|^{2-1} = -g \text{sen}(\theta)$$

Remplazando (5) en la ecuación precedente, se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \text{sen}(\theta) \right) + \frac{f}{2D} v |v|^{2-1} = -g \text{sen}(\theta)$$

De esta ecuación, se obtiene la siguiente

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2D} v |v|^{2-1} = 0. \quad (6)$$

La ecuación (6) es válida para fluidos poco compresibles que fluyen a baja velocidad.

### Ecuación de continuidad

Se considera nuevamente el volumen de control  $\Omega(t)$  y denotamos con  $\Gamma(t)$  su frontera. En  $\Omega(t)$  fluye un fluido de densidad  $\rho$ . Se tiene

$$m(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(x,t) A(x,t) dx$$

luego, por el principio de conservación de la masa  $\frac{dm}{dt} = 0$ . Nótese que el volumen de la porción de fluido contenida en  $\Omega(t)$  es  $A(x,t) dx$ , siendo  $A(x,t)$  el área de la sección transversal que es función de  $x$  y de  $t$ . Resulta

$$0 = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x,t) A(x,t) dx,$$

y por el teorema de transporte de Reynolds, tenemos

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x,t) A(x,t) dx - \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(x,t) A(x,t)) dx + \int_{\Gamma(t)} \rho(s,t) A(s,t) v(s,t) \cdot n(s,t) ds,$$

donde  $n(s,t)$  es el vector normal exterior a  $\Gamma(t)$  y  $v(s,t)$  es la velocidad del fluido. Por el teorema de la divergencia de Gauss (ver [2], [15]),

$$\int_{\Gamma(t)} \rho(s,t) A(s,t) v(s,t) \cdot n(s,t) ds = \int_{\Omega(t)} \text{div}(\rho(x,t) A(x,t) v(x,t)) dx.$$

Luego

$$\int_{\Omega(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho(x,t) A(x,t)) + \text{div}(\rho(x,t) A(x,t) v(x,t)) \right) dx = 0.$$

Como se privilegia el movimiento del fluido en la dirección del eje del tubo, los componentes en las direcciones ortogonales a esta se consideran nulas, o sea  $v(x,t) = (v(x,t), 0, 0)$ . La ecuación precedente se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho A v) = 0, \quad (7)$$

que es la ecuación de continuidad unidimensional, la misma que se la escribe como sigue

$$r \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial r}{\partial t} + r A \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial x} + r v \frac{\partial A}{\partial x} = 0,$$

dividiendo la ecuación precedente para  $r A$ , se deduce la siguiente:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

El primer término de la ecuación (8) conduce a la elasticidad de la pared del tubo y su tasa de deformación con la presión, luego

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dp} \frac{dp}{dt} \quad \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}$$

El término  $\frac{1}{r} \frac{dr}{dt}$  toma en consideración la compresibilidad del fluido. La presión se introduce a través de la definición del módulo de elasticidad del fluido. Así:

$$k = - \frac{dp}{dv} = \frac{dp}{\frac{dv}{\rho}}, \text{ entonces}$$

$$k \frac{d\rho}{\rho} = dp, \text{ de donde } \frac{dp}{dt} = \frac{k}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Reemplazando estos dos últimos resultados en (8) se tiene

$$\frac{1}{k} \frac{dp}{dt} \left( 1 + \frac{k}{A} \frac{dA}{dp} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

realizando las simplificaciones necesarias se reduce a:

$$\frac{dp}{dt} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\text{donde } a^2 = \frac{\frac{k}{\rho}}{1 + \frac{k}{A} \frac{dA}{dp}}.$$

Tomando en consideración que se sigue que:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + r a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

La ecuación (10) se conoce como ecuación unidimensional de conservación de masa para fluidos ligeramente compresibles. En el caso de flujo estable

$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$  con lo que (10) se escribe como:

$$v \frac{\partial p}{\partial x} + r a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

$$v \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Para flujos con velocidad pequeñas con lo que (10) se reduce a la siguiente:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + r a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

y tomando en consideración que  $\frac{\partial p}{\partial t} = r g \frac{\partial H}{\partial t}$ , se sigue:

$$\frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Esta última ecuación conjuntamente con la de Euler, forman el modelo matemático conocido como de la columna elástica que se utiliza para simular el conocido problema de golpe de ariete (para más detalles referirse a [2], [3], [4], [6], [7], [8]). En el caso de estudio, este problema no será tratado debido al interés de modelos de flujo completamente desarrollados, incompresibles en los que la elasticidad de la tubería no es considerada o dicho de otro modo es de efecto despreciable. Para el SOTE, este problema en principio, no es prioritario. Para una segunda fase este modelo tiene mucho interés fundamentalmente por vincularse con el sistema SCADA.

**Existencia y unicidad de la solución del modelo estacionario e isotérmico**

El modelo estacionario de flujo incompresible y completamente desarrollado en una tubería está gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (\rho A v) = 0 \text{ sobre } ]L_1, L_2[, \\ \rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} + F(x, v) = G \text{ sobre } ]L_1, L_2[, \\ v(L_1) = v_0, \quad p(L_1) = p_0. \end{cases}$$

donde la velocidad  $v$  y la presión  $p$  son las variables a analizar, que en este modelo intervienen y son funciones definidas en  $[L_1, L_2]$ , donde  $x \in [L_1, L_2]$ : diámetro interno  $D(x)$  y consecuentemente el área de la sección transversal es  $A(x) = \frac{\rho}{4} D^2(x)$  densidad

del fluido  $r(x)$  perfil del oleoducto  $\frac{dz}{dx}(x)$  y  $G(x) = -g\rho(x) \frac{dz}{dx}(x)$ , y viscosidad cinemática  $\nu$

nemática  $n(x)$  factor de fricción donde la función se define por :

$$f(x, \nu(x)) = \frac{64}{Re(x)} \text{ si } Re(x) \leq 2000,$$

$$f(x, \nu(x)) = f_1 + \frac{f_2 - f_1}{2000} (Re(x) - 2000),$$

cuando  $2000 < Re(x) < 4000$ ; mientras que

$$f(x, \nu(x)) = \frac{1}{M}, \text{ si } Re(x) \geq 4000, \text{ donde:}$$

$$M = \log^2 \left( \frac{\nu}{3.7} + \frac{2.51}{Re(x)} \left( -1.8 \log \left( \frac{6.9}{Re(x)} + \left( \frac{\nu}{3.7} \right)^{1.11} \right) \right) \right)$$

Nótese que se define a  $f_1, f_2$  son los factores de fricción a 2000 y 4000 Reynolds respectivamente. En este intervalo se tiene la transición de flujo laminar a turbulento. El número de Reynolds está definido como

$$Re(x) = \frac{v(x)D(x)}{\nu(x)}.$$

La fricción

$$F(x, \nu(x)) = f(x, \nu(x)) \frac{r(x)}{2D(x)} |v(x)|^{l-1}; \quad 1 < l \leq 2.$$

El diámetro interno del oleoducto  $D$ , la densidad del fluido  $\delta$ , la viscosidad cinemática  $\nu$  son funciones definidas en  $(L_1, L_2)$  estrictamente positivas, constantes a trozos y acotadas, es decir que  $D, r, \nu \in H^1(L_1, L_2)$

Luego existen  $D_{\min}, D_{\max}, r_{\min}, r_{\max}, \nu_{\min}, \nu_{\max} \in \mathbb{R}^+$  tales que para todo  $x \in (L_1, L_2)$

$$D_{\min} \leq D(x) \leq D_{\max},$$

$$r_{\min} \leq r(x) \leq r_{\max}, \nu_{\min} \leq \nu(x) \leq \nu_{\max}.$$

Además  $\nu_0 > 0$ . De la ecuación

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (\rho A v) = 0 \text{ sobre } ]L_1, L_2[, \\ v(L_1) = v_0, \end{cases}$$

se sigue que:  $v(x) = \frac{\rho(L_1)A(L_1)}{\rho(x)A(x)} v_0, x \in [L_1, L_2]$

que muestra que  $v, v' \in L^2(L_1, L_2)$  y en consecuencia  $v \in H^1(L_1, L_2)$

De la ecuación  $\begin{cases} \rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} + F(x, v) = G, \\ p(L_1) = p_0, \end{cases}$

se sigue que:

$$p(x) = p_0 + \int_{L_1}^x \left[ G(s) - \rho(s)v(s) \frac{dv(s)}{ds} - F(s, v(s)) \right] ds$$

$$= p_0 + \int_{L_1}^x G(s) ds - \int_{L_1}^x \rho(s)v(s) \frac{dv}{ds}(s) ds - \int_{L_1}^x F(s, v(s)) ds, \quad x \in [L_1, L_2]$$

Analicemos cada término:

1)  $\int_{L_1}^x G(s) ds = -g \int_{L_1}^x \rho(s) \frac{dz}{dx}(s) ds$ . La función

$\frac{dz}{ds}$  existe en todo punto  $s \in ]L_1, L_2[$  y es acotada.



$$2) \left| \int_{L_1}^{L_2} r(s)v(s)v'(s)ds \right| \leq r_{\max} \int_{L_1}^{L_2} |v(s)v'(s)|ds \leq r_{\max} \|v\|_{H^1(L_1, L_2)}^2 < \infty.$$

3) La función factor de fricción es una función positiva y acotada,

luego existe  $\gamma > 0$  tal que  $|f(x, v(x))| \leq \gamma$ .  
 $\forall x \in [L_1, L_2]$  y consecuentemente

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_1}^{L_2} F(s, v(s))ds \right| &= \int_{L_1}^{L_2} f(s, v(s)) \frac{\rho(s)}{2D(s)} v(s)|v'(s)|^{l-1} ds \\ &\leq \int_{L_1}^{L_2} f(s, v(s)) \frac{\rho(x)}{2D(x)} |v(x)|^l ds \\ &\leq \gamma \frac{\rho_{\max}}{2D_{\min}} \int_{L_1}^{L_2} |v(x)|^l dx \\ &\leq \gamma \frac{\rho_{\max}}{2D_{\min}} \|v\|_{H^1(L_1, L_2)}^l < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left| p(x) \right| \leq |p_0| + \left| \int_{L_1}^x G(s)ds \right| + \left| \int_{L_1}^x \rho(s)v(s)v'(s)ds \right| + \left| \int_{L_1}^x F(s, v(s))ds \right| < \infty,$$

$$\forall x \in [L_1, L_2].$$

En conclusión, las funciones  $v, p \in H_1(L_1, L_2)$  arriba definidas son solución del sistema de ecuaciones diferenciales. Es muy conocido en los cursos de análisis que estas funciones son la única solución del sistema de ecuaciones diferenciales propuesto.

### Aproximación numérica (posición del problema)

La ecuación de continuidad se escribe como

$L_1 > 0, L_2 > 0$  tales que  $L_1 < L_2$ .

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A v) = 0 \text{ sobre } ]L_1, L_2[ \times ]\tau, T[.$$

y la ecuación de Euler

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + F(v) = G \text{ sobre } ]L_1, L_2[ \times ]\tau, T[.$$

En el caso estacionario,  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = 0$  y  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ . y . Luego, las dos ecuaciones precedentes se escriben como el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\rho A v) = 0 \text{ sobre } ]L_1, L_2[, \\ \rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} + F(v) = G \text{ sobre } ]L_1, L_2[, \\ v(L_1) = v_0, p(L_1) = p_0. \end{cases}$$

donde  $v$  y  $p$  son las funciones incógnitas definidas en  $[L_1; L_2]$ . Suponemos que estas funciones son de clase  $C^1$ .

### Discretización

El modelo matemático se discretiza con diferencias finitas centrales.

Sea  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $\tau(n) = \{L_1 = x_0 < \dots < x_n = L_2\}$  una partición de  $[L_1; L_2]$ , donde  $x_{j-1} < x_j, j = 1, 2, \dots, n$ . Ponemos  $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}, \Delta x = \frac{L_2 - L_1}{n}$ . En el caso de mallado uniforme, tenemos  $\Delta x = \Delta x_j, j = 1, 2, \dots, n$ . Se designa con,  $\rho_j, A_j, v_j, p_j$  aproximaciones de  $\rho(x_j), A(x_j), v(x_j), p(x_j), j = 1, 2, \dots, n$ .

El esquema numérico resultante se escribe como sigue:

$$\begin{cases} r_j A_j v_j = r_{j-1} A_{j-1} v_{j-1}, & j = 1, \dots, n \\ r_j \frac{v_j^2 - v_{j-1}^2}{4\Delta x_j} + p_j - p_{j-1} + \frac{\Delta x_j}{2D} r_j \tilde{r}_j \tilde{v}_j |\tilde{v}_j|^{l-1} = -g r_j \frac{z_j - z_{j-1}}{2\Delta x_j}, \end{cases}$$

donde

$$\tilde{x}_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j), \tilde{\rho}_j \approx \rho(\tilde{x}_j) \text{ y } \tilde{f}_j \approx f(\tilde{x}_j, v(\tilde{x}_j)),$$

$$j = 1, 2, \dots, n;$$

que se denomina sistema de ecuaciones discreto, donde  $v_j$  y  $p_j$  son las incógnitas,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Con el propósito de facilitar el cálculo, se define

$$\tilde{r}_j \approx \frac{r_{j-1} + r_j}{2}, \tilde{v}_j \approx \frac{v_{j-1} + v_j}{2}. \text{ Entonces}$$

$$\tilde{r}_j \frac{v_j^2 - v_{j-1}^2}{4\Delta x_j} + p_j - p_{j-1} + \frac{\Delta x_j}{2D} \tilde{r}_j \tilde{f}_j \left( \frac{v_{j-1} + v_j}{2} \right) \left| \frac{v_{j-1} + v_j}{2} \right|^{l-1} = -g \tilde{r}_j \frac{z_j - z_{j-1}}{2\Delta x_j}.$$

De la primera ecuación del sistema discreto obtenemos

$$v_j = \frac{r_{j-1} A_{j-1} v_{j-1}}{r_j A_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Luego:

$$\begin{aligned} &\tilde{r}_j \left( \frac{\rho_{j-1} A_{j-1} v_{j-1}}{\rho_j A_j} \right)^2 - v_{j-1}^2 + p_j - p_{j-1} + \frac{\Delta x_j}{2D} \tilde{\rho}_j \tilde{f}_j \left( \frac{\rho_{j-1} A_{j-1} v_{j-1}}{2\rho_j A_j} + \frac{v_{j-1}}{2} \right) \left| \frac{v_{j-1}}{2} + \frac{\rho_{j-1} A_{j-1} v_{j-1}}{2\rho_j A_j} \right|^{l-1} \\ &= -g \tilde{\rho}_j \frac{z_j - z_{j-1}}{2\Delta x_j} \end{aligned}$$

En esta última ecuación se calcula ,

$$\begin{cases} p_j = p_{j-1} - g \tilde{r}_j \frac{z_j - z_{j-1}}{2\Delta x_j} - \frac{r_j}{4\Delta x_j} \left( \left( \frac{r_{j-1} A_{j-1} v_{j-1}}{r_j A_j} \right)^2 - v_{j-1}^2 \right) \\ - \frac{\Delta x_j}{2D} \tilde{r}_j \tilde{f}_j \left( \frac{r_{j-1} A_{j-1} v_{j-1}}{2r_j A_j} + \frac{v_{j-1}}{2} \right) \left| \frac{v_{j-1}}{2} + \frac{r_{j-1} A_{j-1} v_{j-1}}{2r_j A_j} \right|^{l-1}, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

que permite calcular la presión en cada punto  $x_j$ . Como el área de la sección transversal de la tubería es  $A(x) = \frac{\pi}{4} D_i^2(x)$  entonces  $\frac{A_{j-1}}{A_j} = \frac{D_i^2(x_{j-1})}{D_i^2(x_j)}$  con  $D_i$  el diámetro interno que se escribirá  $D_i$  en  $x_j$ , el esquema numérico precedente se escribe como:

metro interno que se escribirá  $D_i$  en  $x_j$ , el esquema numérico precedente se escribe como:

$$\begin{cases} p_0 \text{ dado} \\ p_j = p_{j-1} - g \tilde{\rho}_j \frac{z_j - z_{j-1}}{2\Delta x_j} - \frac{\tilde{\rho}_j}{4\Delta x_j} \left[ \left[ \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} \left( \frac{D_{j-1}}{D_j} \right)^2 v_{j-1} \right]^2 - v_{j-1}^2 \right] \\ - \frac{\Delta x_j}{4D_j} \tilde{\rho}_j \tilde{f}_j \left[ \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} \left( \frac{D_{j-1}}{D_j} \right)^2 v_{j-1} + v_{j-1} \right] \left| v_{j-1} + \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} \left( \frac{D_{j-1}}{D_j} \right)^2 v_{j-1} \right|^{l-1} \\ j = 1, \dots, n \end{cases}$$

### Cálculo del coeficiente de fricción. Método de Newton

La ecuación de Colebrook ([1], [2], [9]) relaciona el coeficiente de fricción con el número de Reynolds la rugosidad relativa mediante la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon}{3.7 D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right),$$

Donde  $D$  denota el diámetro interno de la tubería, y  $\epsilon$  es la rugosidad que para oleoductos cumple con normas internacionales (0.045 mm para acero comercial). Se observa que el factor de fricción no puede calcularse directamente, por lo tanto, es necesario recurrir a los métodos numéricos, particularmente el método de Newton. La ecuación de Colebrook se expresa en forma equivalente como la siguiente:

$$\frac{\epsilon}{3.7 D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} = 10^{-\frac{1}{2\sqrt{f}}} = e^{-\frac{\ln 10}{2\sqrt{f}}}$$

Se define la función  $\theta$  de  $]0, 1[$  en como:

$$\theta(f) = \frac{\epsilon}{3.7 D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} - \exp\left(-\frac{\ln 10}{2\sqrt{f}}\right)$$

Entonces

$$\theta(f) = -\frac{1}{2} (f^{-1/2})^3 \left( \frac{2.51}{Re} + \frac{\ln 10}{2} \exp\left(-\frac{\ln 10}{2} f^{-1/2}\right) \right)$$

El método de Newton genera una sucesión definida como sigue:

$$\begin{cases} f_0 \text{ dado,} \\ f_{n+1} = f_n - \frac{q(f_n)}{q'(f_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Una aproximación inicial de  $f_0$  se obtiene de la ecuación de S. E. Haaland:

$$f_0^{-1/2} = -1.8 \log_{10} \left( \frac{6.9}{Re} + \left( \frac{\epsilon}{3.7 D} \right)^{1.11} \right)$$

La aproximación inicial  $f_0$  calculada con la ecuación de Haaland difiere a lo mucho en aproximadamente 5% con el valor real, por lo que el método de Newton converge en pocas iteraciones para la precisión fijada  $\epsilon$ . En la práctica  $\epsilon = 10^{-10}$ . Este algoritmo es aplicado cuando el número de Reynolds  $Re \geq 4000$ . Cuando  $0 < Re \leq 2000$ , el factor de fricción se calcula como  $f = \frac{64}{Re}$ . Tomando en consideración que  $Re = \frac{\rho v}{\nu}$  y que  $r, \nu$  son funciones dependientes de la posición en el oleoducto, en cada punto  $x$  del oleoducto debe calcularse  $f$  en la forma propuesta. Para el caso térmico, la viscosidad es también función de la

temperatura  $\theta$ . Escribiremos al número de Reynolds como  $Re = (x, \rho(x), \nu(x), v(x, \theta))$ .

### Modelos de transporte de petróleo por tuberías para mezclas

La parte principal en el problema de transporte de crudos pesados en un oleoducto es el control sobre la viscosidad de este fluido. Uno de los métodos de transporte de crudos pesados es mezclar con otro crudo más ligero llamado diluyente, de modo que dé como resultado un crudo intermedio que tenga una densidad y viscosidad razonables. Con este propósito se determina la fracción de dilución, la densidad de la mezcla, así como la viscosidad a la temperatura de operación.

Sean  $m_d$  la masa del diluyente, la masa de crudo (pesado) y se designe con  $m_m$  a la masa de la mezcla. En lo que sigue los subíndices o superíndices  $d, c, m$  se referirán al diluyente, al crudo y a la mezcla. Tenemos entonces que:  $m_m = m_c + m_d = \rho_c V_c + \rho_d V_d$ , donde  $\rho_c$  y  $\rho_d$  son las densidades del crudo y del diluyente, y  $V_c$  y  $V_d$  son los respectivos volúmenes. Las fracciones de crudo y de diluyente se designan con  $X_d$  y  $X_c$ , definidas como:

$$C_d = \frac{V_d}{V}, \quad C_c = \frac{V_c}{V},$$

con  $V_m = V_d + V_c$  el volumen de la mezcla. Resulta  $X_d + X_c = 1$  de donde

$$V_m = \frac{V_c}{1-X_d} \text{ o } V_m = \frac{V_d}{1-X_c}$$

Con  $0 < X_d < 1, 0 < X_c < 1$ . Se define  $\rho_m = \rho_d X_d + \rho_c X_c$ . Luego

$$r_m = r_d(1-C_c) + r_c C_c = r_d + C_c(r_c - r_d), \text{ o también}$$

$$r_m = r_d C_d + r_c(1-C_d) = r_c + C_d(r_d - r_c)$$

$$C_d = \frac{r_m - r_c}{r_d - r_c}$$

Esta relación será utilizada sistemáticamente en el modelo de transporte de crudos con diluyente. En términos de masas, se tiene:

$$m_m = m_c + m_d \Leftrightarrow \rho_c V_c + \rho_d V_d$$

La gravedad específica de un fluido se designa con

$S_{pgr}$  (specific gravity) y se define como  $S_{pgr} = \frac{\rho}{\rho_a}$ , con  $\rho_a$  la densidad del agua a 60°F. Entonces

$$\frac{r_m}{r_a} V_m = \frac{r_c}{r_a} V_c + \frac{r_d}{r_a} V_d$$

$$S_{pgr}^{(m)} V_m = S_{pgr}^{(c)} V_c + S_{pgr}^{(d)} V_d$$

y de esta relación obtenemos

$$S_{pgr}^{(m)} = S_{pgr}^{(c)} \frac{V_c}{V_m} + S_{pgr}^{(d)} \frac{V_d}{V_m} = S_{pgr}^{(c)} C_c + S_{pgr}^{(d)} C_d$$

Puesto que

$$S_{ppr}|_{60^{\circ}F} = \frac{141.5}{131.5 + API_{|_{60^{\circ}F}}}$$

la ecuación precedente se escribe como

$$\frac{141.5}{131.5 + API_{|_{60^{\circ}F}}^{(m)}} = \frac{141.5}{131.5 + API_{|_{60^{\circ}F}}^{(c)}} X_c + \frac{141.5}{131.5 + API_{|_{60^{\circ}F}}^{(d)}} X_d$$

de donde

$$API_{|_{60^{\circ}F}}^{(m)} = 131.5 - \frac{1}{\frac{X_c}{131.5 + API_{|_{60^{\circ}F}}^{(c)}} + \frac{X_d}{131.5 + API_{|_{60^{\circ}F}}^{(d)}}}$$

Esta es la ecuación de la densidad de la mezcla en unidades de campo a utilizarse en el modelo. Esta expresión es corregida con la temperatura si se toma en consideración que

$$S_{ppr} = -3.433 \times 10^{-4} (T_{oper} - 60) + \frac{141.5}{131.5 + API_{|_{60^{\circ}F}}$$

donde  $T_{oper}$  es la temperatura de operación.

Para el cálculo de la viscosidad de la mezcla se aplica la ecuación ASTM ([3], [4]) para la viscosidad cinemática a la temperatura de operación medida en *cst*. Para el efecto se asume que la viscosidad del crudo es  $\nu_c$  a una temperatura  $T_c$ , la viscosidad del diluyente es a la temperatura  $T_d$ . Resultados experimentales muestran que la viscosidad de la mezcla  $\nu_m$  es:

$$\nu_m = -0,7 + 10^{10 + BC}, \text{ donde}$$

$$A = \log[\log(\nu_c + 0,7)], \quad B = \frac{\log\left(\frac{\log(\nu_c + 0,7)}{\log(\nu_d + 0,7)}\right)}{\log\left(\frac{T_c}{T_d}\right)}, \quad C = \log\left(\frac{T_c}{T_{oper}}\right)$$

Esta viscosidad es la que se incorpora en el modelo de transporte de crudo por tuberías. Para el caso específico de petróleo del oriente ecuatoriano se dispone de la siguiente función para el cálculo de la viscosidad de una mezcla de crudos de diferentes densidades y viscosidades:

$$\nu_m = -0,7 + e^{A+BC}$$

$$A = \ln\left[\ln\left(0,7 + e^{28,49994 - 7,7282 \ln(API)}\right)\right], \quad B = \ln\left(\frac{\ln\left(0,7 + e^{28,49994 - 7,7282 \ln(API)}\right)}{\ln\left(0,7 + e^{21,2908 - 5,7382 \ln(API)}\right)}\right)$$

$$C = -11,692874 * \ln\left(\frac{460 + T}{560}\right)$$

La investigación desarrollada, constituye un aporte a la ciencia y una contribución de alto impacto para el Estado ecuatoriano, la comunidad y el medio ambiente, por efecto de las siguientes razones:

- Posibilita simular el transporte de crudo pesado a través del SOTE, de lo cual se deriva, un importante ahorro económico para el Estado ecuatoriano.
- El impacto ambiental se elimina, dado que las pruebas se las realiza en el simulador y no en la estructura física del SOTE.
- El estudio coadyuva a la generación de aprendizajes significativos, consolida el conocimiento y fortalece los principios de la Comunidad Científica.

## Resultados

Se desea transportar un caudal de 200000 BPD de petróleo de 130 API, cuya viscosidad a 800 F es de 80 cst y a 1200 F es de 55 cst, usando como diluyente un crudo de 290 API, cuya viscosidad a 800 F es de 25 cst y a 1200F es de 13 cst a condiciones de bombeo iniciales de temperatura 1100 F, rugosidad absoluta de 0.0045 cm y una presión de succión de 120 psi.

Si se desea que el API de la mezcla sea 16.5 OAPI a 60 OF, el programa calcula la fracción de diluyente que se tiene que emplear, en este caso es de 0.237, lo que significa un caudal de diluyente de 62200.7 BPD, lo que da como resultado un caudal de la mezcla de 262200.7 BPD.

La Figura 3, muestra las curvas de viscosidad de los fluidos en función de la temperatura, donde se puede apreciar, que a mayor temperatura, la viscosidad disminuye. El simulador permite configurar las estaciones de bombeo, como por ejemplo la estación de Lumbaqui, que cuenta con seis bombas, cada una con seis etapas, funcionando a 3400 RPM.



Fig. 3. Curvas de Viscosidades.

La Figura 4, muestra la curva que corresponde a una sola etapa de una bomba para agua. El simulador corrige automáticamente la curva para la mezcla a ser transportada mediante un modelo matemático.



Fig 4. Curva del sistema de bombeo de la estación para mezcla.

La Figura 5, muestra el cálculo del punto óptimo de operación de la bomba, donde se puede visualizar que la bomba opera en condiciones óptimas



Fig 5. Punto óptimo de operación.

En la figura 6, se presenta el perfil del oleoducto en color verde, en color rojo se tiene la máxima presión admisible (M.P.A.), mientras que en color negro, se representa el gradiente hidráulico a lo largo del oleoducto. Es claro que el gradiente hidráulico tiene que estar entre la M.P.A. y el perfil del oleoducto. Si la curva del gradiente hidráulico está por encima de la M.P.A. la tubería se rompería, mientras que si se encuentra por debajo del perfil del oleoducto, significaría que la presión es insuficiente para que el fluido se mueva. En este caso se puede observar que es factible transportar un caudal de 200000 BPD de 130 API usando 62200 BPD de diluyente de 290 API.

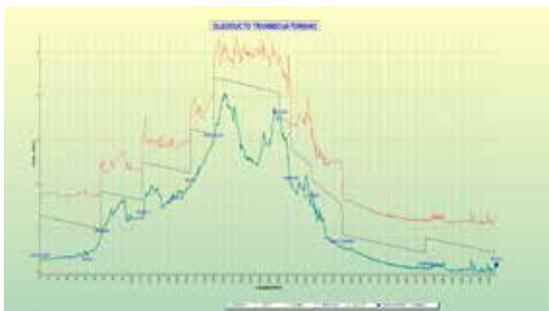


Fig 6. Perfil del Oleoducto Transecuatoriano.

## Conclusiones y recomendaciones

Mediante la modelización matemática y la simulación numérica, se generan escenarios virtuales para determinar la factibilidad de transportar un determinado caudal de crudo pesado usando un diluyente, desde la estación de Lago Agrio, hasta Balao, sin correr el riesgo de tener un colapso de la infraestructura.

El diseño del modelo matemático isotérmico, se ajusta a: las condiciones de viscosidad del crudo, caudal, condiciones iniciales de bombeo y estructurales del SOTE

El esquema numérico de diferencias finitas, permitió hallar una solución aproximada del sistema de ecuaciones diferenciales, logrando identificar la presión y la velocidad en cualquier punto del Oleoducto.

Los resultados obtenidos mediante el simulador, han sido comparados con los resultados de presión y velocidad, arrojados por el Sistema SCADA (controla y supervisa el proceso de transporte de crudo a lo largo del oleoducto), presentando un margen de error relativo menor al 5%.

Se recomienda investigar y desarrollar modelos matemáticos térmicos para el transporte de crudo pesado, que permita simular el transporte de crudo por el oleoducto, añadiendo estaciones de calentamiento virtuales, que en el caso de determinarse su factibilidad en la simulación, se pueda sugerir su construcción.

## Referencias bibliográficas

Benalcázar Gómez, H. (2008). Análisis Numérico, Quito, Ecuador: Preprinter.

Bergada. J. M. (2015). Mecánica de Fluidos. Iniciativa Digital Politécnica, Universidad Politécnica de Cataluña, España.

Chung. T. (2002). Computational Fluid Dynamics, Editorial Cambridge University Press, Cambridge.

Hirsch. C. (2007). Numerical Computation of Internal & External Flows, Editorial Elsevier, Amsterdam.

Huilgol. R. (2015). Fluid Mechanics of Viscoplasticity, Editorial Springer, Berlín.

Larock. B, Jeppson. R & Watters. G. (2000). Hydraulics of Pipeline Systems, Editorial CRC Press, Boca Raton.

Mohitpour. M, Golshan. H., & Murray. A (2003) Pipeline Design & Construction. A Practical Approach, Second Edition, Editorial American Society of Mechanical Engineers ASME Press, New York.

Mohitpour. M, Szabo. J & Van Hardevel. T. (2005). Pipeline Operation & Maintenance. A Practical Approach, Editorial American Society of Mechanical Engineers (ASME Press), New York.

Pozrikidis. C. (2017). Fluid Dinamics, Editorial Springer, Berlín.

Rodríguez. L., Vega L. (2013). Cálculos Térmicos e Hidrodinámicos de un oleoducto, Editorial Académica Española.

Streeter. V, Wylie. B & Bedford. K. (2000). Mecánica de Fluidos, Novena Edición, Editorial Mc-Graw-Hill, Bogotá.

Tannehill. J, Anderson. D & Pletcher. R. (1997). Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Editorial Taylor & Francis, Philadelphia.

Teman. R & Miranville. A (2000). Mathematical Modeling in Continuum Mechanics, Editorial Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Wesseling. P. (2001). Principles of Computational Fluid Dynamics, Editorial Springer-Verlag, Berlín.