

SISTEMAS LINEALES AUTÓNOMOS DE ORDEN DOS



Mat. Jorge Lara Prado

Cuando de una ecuación diferencial se conoce la solución general, todos los problemas que se pueden plantear pueden ser estudiados satisfactoriamente. Del estudio de la solución general resultan conclusiones en cuanto a la estabilidad, existencia de soluciones periódicas, etc. Lamentablemente la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales no pueden ser resueltas en forma explícita y muchas veces la fórmula que da la solución general resulta excesivamente complicada, que también puede llegar a ser de poca utilidad para una discusión exhaustiva de las propiedades de las soluciones.

Los métodos numéricos, muy eficaces cuando se trata de dar la solución de algún problema específico, tienen en general poco valor para la discusión global de las soluciones, cuando se trate de estudiar las propiedades del conjunto de todas las soluciones. En efecto, el cálculo de una, diez o aun mil soluciones particulares de una ecuación diferencial solo da una idea muy vaga con respecto al comportamiento de todas las soluciones.

También los métodos que permiten obtener la solución en forma de series, presentan dificultades insalvables cuando se trata de discutir el comportamiento de las soluciones.

Por otra parte, para muchas aplicaciones, interesa discutir problemas bien distintos del cálculo efectivo de una solución particular. Interesa, por ejemplo, conocer la existencia y número de puntos de reposo de un sistema físico, la estabilidad de dichos puntos de reposo, la existencia de soluciones periódicas, el comportamiento asintótico de las soluciones, etc. Es imprescindible, entonces, poder atacar el problema directamente, es decir, estudiar las propiedades de las soluciones, sin necesidad de resolver una ecuación diferencial.

En este artículo de carácter divulgativo se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

1. Puntualizar la necesidad de señalar condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial.
2. Utilizar el análisis cualitativo para el estudio del comportamiento de las

soluciones de una ecuación diferencial autónoma.

3. Clasificar los puntos de equilibrio de una ecuación diferencial en la recta real así como también los puntos de equilibrio de sistemas autónomos lineales y no lineales de orden dos.

Teorema de existencia y unicidad

Antes de intentar determinar la solución a un problema de valor inicial es fun-

damental saber primero si tiene solución (existencia), si es única o no. Consideremos entonces el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0.$$

Teorema de existencia. Si

$f(x, y)$ es continua en el rectángulo

$$R : a < x < b; \quad c < y < d \quad \text{y si} \quad (x_0, y_0)$$

es un punto de R , entonces existe una

función $y = y(x)$ definida en un inter-

valo $I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset]a, b[$ tal que

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{y} \quad y' = f(x, y) \quad \text{para} \quad x \in I.$$

Ejemplo 1. Dada la ecuación diferencial $y' = -\frac{y^2}{x^2} = f(x, y)$, se obtiene

como solución: $y = \frac{x}{Cx-1}$. Debemos agregar la solución $y = 0$. El Gráfico 1 muestra algunas soluciones.

▪ La función $f(x, y) = -\frac{y^2}{x^2}$ es continua en un entorno de cada punto (x_0, y_0) con $x_0 \neq 0$. De acuerdo al teorema de existencia, cada problema de valor inicial con $y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 0$ tiene solución (podría ser única o no) en un entorno de $x = x_0$. Los únicos puntos (x_0, y_0) candidatos a que el problema de valor inicial no tenga solución son los que tienen la abscisa $x_0 = 0$. De estos puntos: Para $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, no existe solución pues todas las soluciones cumplen la condición $y(0) = 0$ y para $(0, 0)$ hay infinitas soluciones. Todas las soluciones satisfacen la condición inicial $y(0) = 0$.

Notemos que la función f no es continua en $(0, 0)$ pero la ecuación tiene infinitas soluciones que cumplen con la

condición inicial $y(0) = 0$. Es decir que la continuidad de f en (x_0, y_0) es condición suficiente pero no necesaria para la existencia de soluciones del problema de valor inicial con $y(x_0) = y_0$.

Nota. El intervalo de la existencia de la solución al problema de valor inicial puede ser arbitrariamente pequeño o muy grande.

Ejemplo 2



Gráfico 1

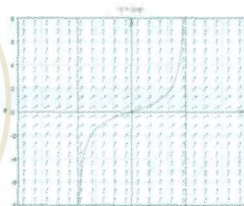


Gráfico 2

Consideremos la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$. La solución general está dada por $y = \tan(x + C)$. Para el problema de valor inicial $y(0) = 0$, obtenemos $C = 0$. El dominio de la solución es $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. El Gráfico 2 siguiente muestra el campo de pendientes y una solución.

Si bien la función $f(x, y) = 1 + y^2$ es continua en todo el plano, la solución

explota en tiempo finito. Este ejemplo muestra que es posible que $f(x, y)$ sea continua en todo el plano, pero sin embargo las soluciones tienen intervalos de existencia finitos.

El intervalo $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ que garantiza el teorema de existencia puede ser arbitrariamente pequeño. Es decir la existencia de la solución está garantizada solo en un entorno (arbitrariamente pequeño) de $x = x_0$.

Teorema de unicidad. Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ son continuas en el rectángulo $R : a < x < b; c < y < d$, con $(x_0, y_0) \in R$, entonces existe una única solución $y = y(x)$ que está definida en un intervalo $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ y tal que $y(x_0) = y_0$ y $y' = f(x, y)$ para $x \in I$.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$. La solución general es $y = (x + C)^3$. Debemos agregar la

solución especial $y = 0$. Para el problema de valor inicial $y(0) = 0$, tenemos dos soluciones: $y_1(x) = 0$ y $y_2(x) = x^3$.

Note que la función definida a tramos por $y_3(x) = 0$ para $x < 0$ y $y_3(x) = x^3$ para $x \geq 0$ es también una solución.

La función $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ es continua en todo el plano y, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y^{-\frac{1}{3}}$ es discontinua solo para $y = 0$. Cada problema de valor inicial $y(x_0) = 0$ no tiene solución única.

La condición de que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sea continua es suficiente pero no necesaria para que la solución del problema de valor inicial sea única.

Definición. Sea $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una función definida en algún intervalo de la recta. Se dice que f verifica la condición de Lipschitz si: $|f(x) - f(y)| < L|x - y|, \forall x, y \in I$, donde L es la constante de Lipschitz de la función f .

Por ejemplo la función $f(x) = x^2$ es lipschitziana en cualquier intervalo acotado de la recta (aunque no en toda la recta, pues la constante depende del intervalo).

Veamos ahora que toda función derivable con derivada continua es lipschitziana localmente.

Lema. Sea $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una función derivable y con derivada acotada en I . Entonces $f(x)$ es lipschitziana y una constante de Lipschitz es el máximo de la derivada en I .

Hay funciones que no son derivables y sin embargo son lipschitzianas. Por ejemplo la función valor absoluto en el origen. Una función que no es lipschitziana (y por lo tanto no es derivable, aunque si continua) es $f(x) = \sqrt{x}$, continua en $x = 0$ aunque no derivable ni lipschitziana. En efecto, aplicando la definición:

$$f(x) - f(y) = \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

que no se puede acotar en un entorno de cero.

Teorema. Sea el problema $X'(t) = A(t)X(t) + b(t), X(t_0) = X_0$,

donde $A : [t_0, t_1] \rightarrow M_n(\mathbf{R})$, $b : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}$ son funciones continuas.

Entonces existe una única solución al problema de valor inicial dado.

Ecuaciones diferenciales autónomas en la recta

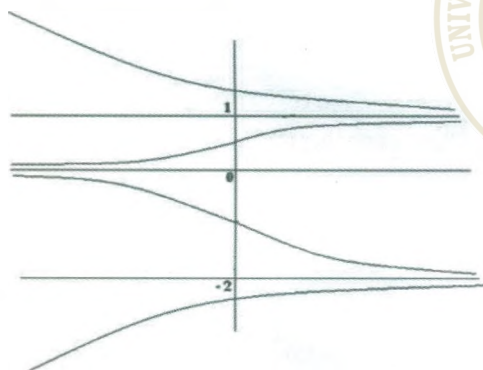
Son ecuaciones de la forma $y' = f(y)$.

Analizaremos las ecuaciones diferenciales autónomas en la recta y nuestro objetivo es mostrar que una buena parte de la información acerca del comportamiento de las soluciones de estas ecuaciones puede deducirse del denominado diagrama de fases.

En el caso de las ecuaciones diferenciales autónomas, el campo de pendientes

es especial. Las pendientes que corresponden a dos puntos diferentes con la misma coordenada x son iguales. Dicho en otras palabras, el campo de pendientes de una ecuación diferencial autónoma es paralelo a lo largo de cada línea horizontal.

Ejemplo. El siguiente gráfico muestra el comportamiento de las soluciones de la ecuación $\frac{dx}{dt} = x(1-x)(2+x)$.



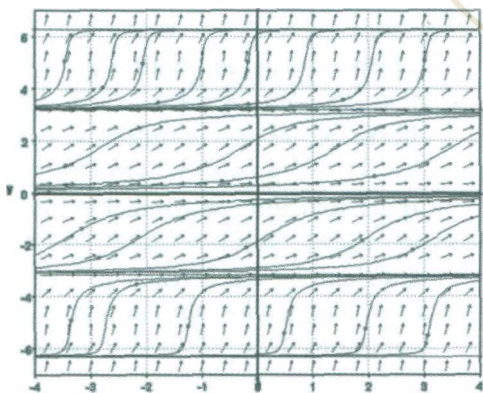
Para la ecuación dada, podríamos haber usado procedimientos analíticos para encontrar su solución. Sin embargo esas integraciones son algo complicadas y las fórmulas que resultan no son fáciles de interpretar.

Esto evidencia la fuerza de los métodos geométricos y cualitativos para estudiar las ecuaciones diferenciales. Con muy poco trabajo, ganamos mucha información sobre el comportamiento de las soluciones. Si bien no podemos utilizar métodos cualitativos para responder preguntas específicas como cuál es el valor exacto de la solución en un tiempo dado, es posible utilizarlo para comprender el comportamiento a largo plazo de las soluciones.

Estas ideas son especialmente importantes si la ecuación diferencial considerada no puede tratarse por procedimientos analíticos. Así por ejemplo, dada la ecuación diferencial: $\frac{dx}{dt} = e^{\frac{x^2}{10}} \sin^2 x$. El lado derecho de la ecuación es siempre positivo, excepto si $x = n\pi$, para cualquier entero n . Estas líneas especiales corresponden a soluciones de equilibrio de la

ecuación. Entre estas líneas de equilibrio, las soluciones deben ser crecientes.

De acuerdo al campo de pendientes, esperamos que sus gráficas se encuentren sobre una de las líneas horizontales o que crezcan desde una de esas líneas a la siguiente superior cuando t tiende a infinito. En consecuencia, podemos predecir el comportamiento a largo plazo de las soluciones aun cuando no sea posible resolver explícitamente la ecuación.



Estabilidad e inestabilidad de los puntos críticos

Si consideramos la ecuación diferencial $x' = ax$, dada una condición ini-

cial $x(t_0) = x_0$, sabemos que la solución de dicho problema de valor inicial es $x(t) = x_0 e^{at}$. Se encuentra tres tipos de comportamientos de sus soluciones respecto al punto crítico según sea $a > 0$, $a = 0$ o $a < 0$.

Para $a < 0$, todas las soluciones se acercan al punto crítico $x = 0$. Para $a > 0$, se alejan y si $a = 0$ todas son estacionarias.

Diremos que un punto crítico es estable si las soluciones que empiezan cerca de él permanecen cerca para todos los tiempos posteriores al instante inicial. Más aún, si las órbitas no solo permanecen cerca, sino que se aproximan al punto de equilibrio (como cuando $a < 0$) diremos que es asintóticamente estable.

Si un punto crítico no es estable diremos que es inestable. (En el ejemplo, ello ocurre si $a > 0$).

Para $a = 2$, y $a = -2$, se tiene los siguientes gráficos.

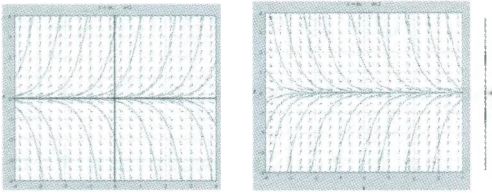


Diagrama de fase para las ecuaciones autónomas en la recta

En la recta real marcamos los puntos críticos de la ecuación diferencial $x' = f(x)$, es decir aquellos puntos para los cuales $f(x) = 0$. La recta queda dividida en intervalos. En cada uno de ellos el signo de $f(x)$ es constante, porque f es continua y no puede anularse.

Si consideramos un intervalo en que $f(x) > 0$, las soluciones solo pueden crecer mientras estén en él. En un intervalo en que $f(x) < 0$, las soluciones decrecen.

Si marcamos con una flecha que apunta hacia la derecha (o hacia arriba) en los

intervalos donde $f(x) > 0$ y con una flecha hacia la izquierda (o hacia abajo) en los intervalos donde $f(x) < 0$. En dicho diagrama está contenido lo esencial de la información. El siguiente gráfico muestra la línea de fase de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x)(2+x)$$



Clasificación de los puntos de equilibrio

- Decimos que un punto de equilibrio x_0 es un sumidero si cualquier solución con condición inicial suficientemente cercana a x_0 es asintótica a x_0 cuando t tiende a infinito. Dicho punto se denomina una fuente si, cuando todas las soluciones que comienzan cerca de x_0 tienden a alejarse de x_0 a medida que t aumenta.

- Una fuente es un sumidero si el tiempo transcurre hacia atrás. Todo punto de equilibrio que no es ni sumidero ni fuente se llama un nodo.



Propiedad. Sea x_0 un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $x' = f(x)$, con f una función diferenciable continuamente.

- Si $f'(x_0) < 0$ entonces x_0 es un sumidero.
- Si $f'(x_0) > 0$ entonces x_0 es una fuente.
- Si $f'(x_0) = 0$ o si $f'(x_0)$ no existe, se necesita información adicional.

Cantidades que se conservan o decrecen sobre las órbitas

Si una ecuación diferencial modela un sistema mecánico aislado, entonces la

energía del sistema permanece constante o decrece al evolucionar el sistema. El primer caso corresponde a sistemas donde la energía no se disipa y en la segunda categoría caen los fenómenos en que una parte de la energía del sistema se va perdiendo en la evolución (por ejemplo un sistema en el cual hay rozamiento, lo que hace perder energía mecánica al generar calor).

Por ejemplo, si se considera la ecuación del oscilador armónico $m x'' = -kx$, que se puede escribir como $x'' + \omega^2 x = 0$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, o como el sistema $\begin{cases} x' = \omega y \\ y' = -\omega x \end{cases}$ al introducir la variable $y = \frac{x'}{\omega}$. En este sistema hay dos tipos de energía: la energía cinética debido a la velocidad con que se desplaza la masa m y la energía almacenada en el resorte al deformarse. Es conocido que la energía total se conserva y es la suma de las energías cinética y potencial. Veamos cómo nuestro modelo

recoge esos hechos. La energía cinética es $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(x')^2$. La energía potencial de deformación del resorte es:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$

La energía total del sistema es $E_T = \frac{1}{2}m(x')^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Si calculamos la derivada E' de la energía con respecto al tiempo, obtenemos:

$$(E_T)' = m(x')x'' + kxx' = x'(mx'' + kx) = 0,$$

lo que muestra que la energía se conserva a lo largo de las trayectorias del sistema.

Sistemas lineales de orden dos

Consideraremos sistemas de la forma $Y'(t) = AY(t)$ donde A es una matriz a coeficientes reales. Si hacemos el cambio de variable $Y = TZ$ donde T es una matriz constante no singular, se obtiene el sistema $Z' = (T^{-1}AT)Z$, donde la matriz de coeficientes es similar a la matriz A .

• Si $\det(A) \neq 0$, por ser el caso más frecuente), eso significa que cero no es un valor propio de la matriz A y por tanto que el origen es el único punto crítico del sistema.

• Se puede mostrar que existe una matriz no singular T tal que

$T^{-1}AT$ es igual a una de las siguientes seis matrices.

i. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, donde $\mu < \lambda < 0$ o $0 < \mu < \lambda$.

ii. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ donde $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$.

iii. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ con $\mu < 0 < \lambda$.

iv. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ donde $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$.

v. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \neq 0$,
 $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$.

vi. $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ con $\beta \neq 0$.

Los casos v) y vi) corresponden a valores propios complejos conjugados de la matriz

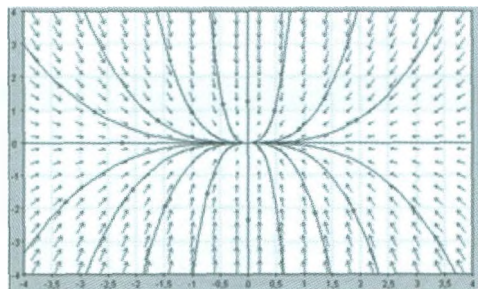
A , $\alpha \pm i\beta$ y $\pm i\beta$, respectivamente.

En los cuatro primeros casos los valores propios son reales.

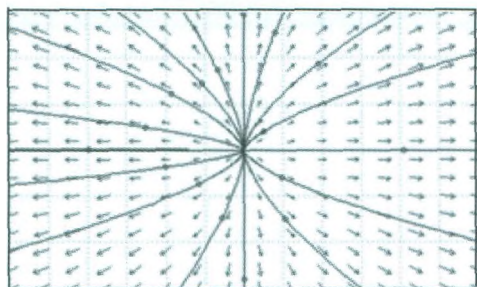
Podemos obtener los retrato fase asumiendo que $T^{-1}AT$ es una de las formas i) a vi).

Caso i) La solución de $Z' = (T^{-1}AT)Z$ que pasa por el punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ en $t = 0$ es $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\mu t} \end{pmatrix}$. Si $\mu < \lambda < 0$ tenemos que $\Phi(t) \rightarrow 0$ cuando t tiende al infinito.

$$\mu < \lambda < 0$$



$$0 < \mu < \lambda$$

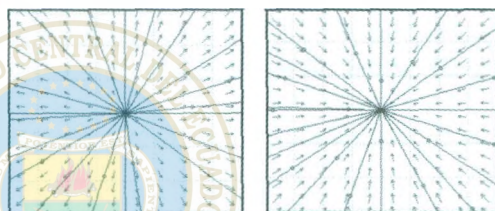


Si $0 < \mu < \lambda$ toda trayectoria tiende hacia fuera del origen cuando $t \rightarrow +\infty$.

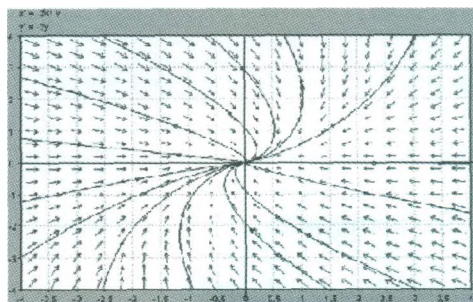
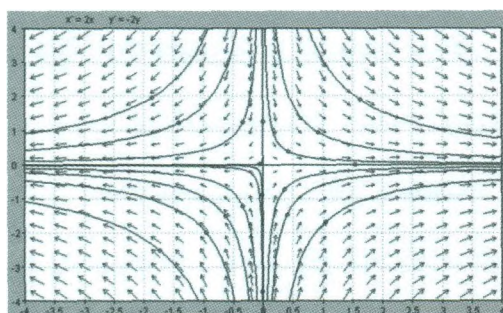
Caso ii) La solución de $Z' = (T^{-1}AT)Z$ que pasa por el punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ en $t = 0$ es $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\mu t} \end{pmatrix}$.

Si $\lambda > 0$.

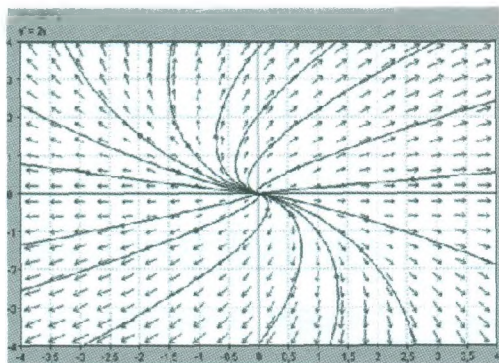
Si $\lambda < 0$.



Caso iii): Aquí $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\mu t} \end{pmatrix}$, con $\mu < 0$ y $\lambda > 0$. Es la solución que pasa por (x_0, y_0) cuando $t = 0$. Cuando $t \rightarrow +\infty$, $\Phi_1(t) \rightarrow \pm\infty$ de acuerdo a si $x_0 > 0$ o si $x_0 < 0$ y $\Phi_2(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Es fácil ver que si $|\lambda| = |\mu|$ las órbitas son hipérbolas rectangulares. Para arbitrarios $\mu < 0$ y $\lambda > 0$, se tiene curvas como las que se indican en el siguiente gráfico. El origen es llamado un punto de silla.



Caso iv) Aquí $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t \\ y_0 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$, es la solución que pasa por (x_0, y_0) cuando $t = 0$ y si $\lambda < 0$ el plano fase está caracterizado por el hecho de que toda órbita tiende al origen cuando t tiende a infinito y tiene como dirección límite a $(0,0)$. Se tiene que $\frac{dy}{dx} = \frac{\Phi_2'(t)}{\Phi_1'(t)} = \frac{\lambda \Phi_2(t)}{\lambda \Phi_1(t) + \Phi_2(t)} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. El origen en este cuarto caso es llamado un nodo impropio.

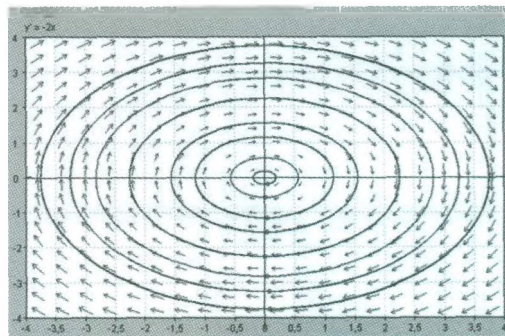


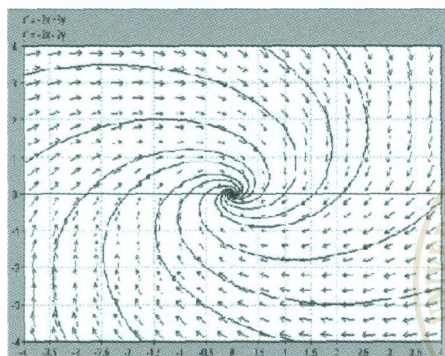
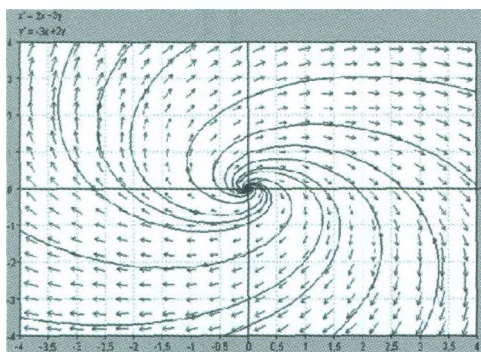
Caso v) La solución para $a > 0$ que pasa por el punto (x_0, y_0) cuando $t = 0$ es

$$\Phi(t) = e^{at} \begin{pmatrix} x_0 \cos(\beta t) + y_0 \sin(\beta t) \\ -x_0 \sin(\beta t) + y_0 \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

Si designamos por $\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\cos \alpha = \frac{x_0}{\rho}$, $\sin \alpha = \frac{y_0}{\rho}$, se puede escribir

$$\Phi(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \rho \cos(\beta t - \alpha) \\ -\rho \sin(\beta t - \alpha) \end{pmatrix}$$





Bibliografía

Blanchard, P., Devaney, R., and Hall, G. Differential Equations. Pacific Grove, CA: Brooks – Cole, 2002.

Devaney, R. Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Boulder, CD: Westview Press, 1989.

Morris, W., Stephen Smale, Robert Devaney. Differential Equations, Dynamical Systems, An Introduction to Chaos. Academic Press, 2003.

Murray, J. Mathematical Biology. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

Strogatz, S. Nonlinear Dynamics and Chaos. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.

