TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

Continuación de la página 138, número 121

2ª Debe ser

$$\text{lím.}\ (\sqrt{a+\omega}-\sqrt{\omega}\ )=0.$$

Pues

$$\sqrt{a+\omega}-\sqrt{\omega}=\frac{(\sqrt{a+\omega}-\sqrt{\omega})(\sqrt{a+\omega}+\sqrt{\omega})}{\sqrt{a+\omega}+\sqrt{\omega}}=\frac{a}{\sqrt{a+\omega}+\sqrt{\omega}}.$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1651
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

y

$$\text{lím.}\left[\sqrt{a+\omega}-\sqrt{\omega}\right]=\frac{a}{\text{lím.}\left[\sqrt{a+\omega}+\sqrt{\omega}\right]}=\frac{a}{\infty}=0.$$

3ª Debe ser

$$\text{lím.}\left[\sqrt{\omega(a+\omega)}-\omega\right]=\frac{a}{2}.$$

Pues

$$\sqrt{\omega(a+\omega)}-\omega=\sqrt{\omega}\,\frac{\left[\sqrt{a+\omega}-\sqrt{\omega}\right]\left[\sqrt{a+\omega}+\sqrt{\omega}\right]}{\sqrt{a+\omega}+\sqrt{\omega}}=$$

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{a}{\omega}+1}+1};$$

luego

$$\text{lím.}\left[\sqrt{\omega(a+\omega)}-\omega\right]=\text{lím.}\frac{a}{\sqrt{\frac{a}{\omega}+1}+1}=\frac{a}{1+1}=\frac{a}{2};$$

porque

$$\text{lím.}\sqrt{\frac{a}{\omega}}=\sqrt{\frac{a}{\infty}}=0.$$

4ª $$\text{lím.}\left(\frac{1}{(\omega+1)^r}:\frac{1}{\omega^r}\right)=1.$$

5ª $$\text{lím.}\frac{[\omega+1]^2+\omega^2+1}{(\omega+1)^2+\omega^2-1}.x=x.$$

6ª $$\text{lím.}\left(\frac{\tau}{1+\tau}.\text{arc. tg.}\tau\right)=\frac{\pi}{2}.$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1651 QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Nota. En expresiones, como las de los ejemplos 2º y 3º, podía escribirse

$$\text{lím.}\left[\sqrt{a+\omega}-\sqrt{\omega}\right]=\infty-\infty\,,$$

$$\text{lím.}\left[\sqrt{\omega(a+\omega)}-\omega\right]=\infty-\infty\,,$$

con lo cual resultarían símbolos de indeterminación en lugar de los valores determinados 0 y $\frac{a}{2}$; sin negar que puedan ser exactas las expresiones anteriores en cuanto á la forma, se sigue, que para tales símbolos de indeterminación resultan los valores determinados, de 0 en el primer caso, y $\frac{a}{2}$ en el segundo. Por esto es necesario observar, que supuesta la aproximación al límite, el valor exacto ó determinado de una función, ó cantidad cualquiera, se halla separando, en cuanto sea posible, las variables de las constantes, y reduciendo así las expresiones á formas simples ó más adecuadas, antes de dar á las variables los valores que les correspondan, como magnitudes crecientes ó decrecientes.

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

40. Límites de las cantidades que se relacionan por operaciones algébricas. En lo que precede ya hemos tenido ocasión de considerar el límite de sumas, diferencias, productos, &ª; y, como de ordinario hay que hallar el límite de magnitudes variables ligadas entre sí por medio de tales operaciones, es preciso demostrar los siguientes

TEOREMAS

I. *El límite de una suma algébrica de funciones,* **es igual á la suma algébrica de los límites de las funciones.**

Decimos que

$$\text{lím.}\ [f(x) \pm f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots\ldots] =$$

$$\text{lím.}\ f(x) \pm \text{lím.} f_1(x) \pm \text{lím.} f_2(x) \pm \ldots\ldots$$

Demos^{n}.—Si

$$\text{lím.} f[x] = a,\ \text{lím.} f_1[x] = b,\ \text{lím.} f_2[x] = c, \ldots\ldots$$

se verificará en las cercanías ó antes del límite [nº 35, *lema*]

$$f[x] = a \pm \alpha,\ f_1[x] = b \pm \beta,\ f_2[x] = c \pm \gamma, \ldots\ldots;$$

luego

$$f[x] \pm f_1[x] \pm f_2[x] \pm \ldots\ldots = [a \pm \alpha] \pm [b \pm \beta] \pm [c \pm \gamma] \pm \ldots\ldots$$

$$= [a \pm b \pm c \pm \ldots\ldots] \pm [\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots\ldots];$$

por tanto

$$\text{lím.} [f(x) \pm f_1[x] \pm f_2[x] \pm \ldots\ldots] = \text{lím.} [(a \pm b \pm c \pm \ldots\ldots) \pm$$

$$(\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots\ldots)] = a \pm b \pm c \pm \ldots\ldots$$

[2] $$= \text{lím.} f[x] \pm \text{lím.} f_1[x] \pm \text{lím.} f_2[x] \pm \ldots\ldots$$

L. Q. D. D.

Ya se sabe que

$$\text{lím.} (\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \delta \pm \ldots\ldots) = 0,$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1651
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

por el mismo *lema.*

II.—*El límite de un producto de funciones*, es igual al producto de los límites de las funciones.

Debe ser

$$\text{lím.}[f(x).f_1[x].f_2[x]\ldots]=\text{lím.}f(x).\,\text{lím.}f_1(x).\text{lím.}f_2(x)\ldots$$

Demos^{n}.—Si

$$\text{lím.}f[x]=a,\ \text{lím.}f_1[x]=b,\ \text{lím.}f_2[x]=c\ldots,$$

de conformidad con el *lema* anteriormente citado, se verificará en las cercanías ó antes del límite,

$$f(x)=r\pm\alpha,\ f_1(x)=b\pm\beta,\ f_2[x]=c\pm\gamma,\ldots;$$

por tanto

$$f[x].f_1(x).f_2(x)\ldots=(a\pm\alpha)(b\pm\beta)(c\pm\gamma)\ldots$$

$$=a.b.c\ldots\pm a.\beta.\gamma\ldots\pm b.\alpha.\gamma\ldots\pm\alpha.\beta.\gamma\ldots;$$

y, como en el límite son $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ cero, resulta

[3] $$\text{lím.}[f(x).f_1(x).f_2(x)\ldots]=a.b.c\ldots=$$

$$\text{lím.}f(x).\text{lím.}f_1[x].\text{lím.}f_2[x]\ldots$$

L. Q. D. D.

III.—*El límite de un cociente de funciones*, es igual al cociente de los límites de las mismas.

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Es

$$\text{lím.}[f(x) : f_1(x)] = \text{lím.} f(x) : \text{lím.} f_1(x) \qquad [4]$$

Demosⁿ.—Si

$$\text{lím.} f[x] = a, \text{ y } \text{lím.} f_1[x] = b,$$

antes del límite será [nº 35, lema],

$$f[x] = a \pm \alpha, \text{ y } f_1(x) = b \pm \beta;$$

por tanto

$$\frac{f(x)}{f_1[x]} = \frac{a \pm \alpha}{b \pm \beta} = \frac{a}{b} \pm \frac{\alpha - \frac{a\beta}{b}}{b \pm \beta};$$

pero en el límite el numerador de la segunda fracción es cero, por serlo α y β; luego

$$\text{lím.} \frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{a}{b} = \frac{\text{lím.} f(x)}{\text{lím.} f_1[x]}.$$

L. Q. D. D.

IV.—*El límite de una potencia de funciones,* **es igual al límite de la base elevado al límite del exponente.**

Debe ser

$$\text{lím.}\left(f[x]^{f_1[x]}\right) = \text{lím.} f(x)^{\text{lím.} f_1(x)} \qquad [5]$$

Demosⁿ.—Si

$$\text{lím.} f[x] = a, \text{ y } \text{lím.} f_1[x] = b,$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR FUNDADA EN 1651 QUITO ARCHIVO HISTÓRICO DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

y por esto, de conformidad con el lema del nº 35,

$$f[x]=a\pm\alpha, \text{ y } f_1[x]=b\pm\beta;$$

tendremos

$$f[x]^{f_1[x]}=(a\pm\alpha)^{b\pm\beta};$$

y tomando los logaritmos de esta ecuación,

$$\log.\left(f(x)^{f_1(x)}\right)=\log.\left((a\pm\alpha)^{b\pm\beta}\right)=(b\pm\beta).\log.[a\pm\alpha],$$

y

$$\text{lím.}\left(\log.\left\{f(x)^{f_1[x]}\right\}\right)=b.\log.a;$$

por tanto antes del límite

$$\log.\left(f(x)^{f_1(x)}\right)=b.\log.a+\delta.$$

Si es B la base del sistema de logaritmos que consideramos, será log. B=1; y como

$$\delta=1.\delta=\log.B.\delta \text{ ó } \delta.\log.B,$$

será

$$\log.\left[f[x]^{f_1[x]}\right]=b.\log.a+\delta.\log.B.$$

$$=\log.\left[a^b.B^\delta\right];$$

luego, no considerando los logaritmos,

$$f(x)^{f_1(x)}=a^b.B^\delta;$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1651 QUITO
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

y por esto en el límite,

$$\text{lím.}\left[f(x)^{f_1[x]}\right]=\text{lím.}\left[a^b.B^\delta\right]$$

$$=\text{lím.}\left[a^b\right].\text{lím.}\left[B^\delta\right]$$

$$=a^b.B^0$$

$$=a^b=\text{lím.}f(x)^{\text{lím.}f_1(x)}$$

L. Q. D. D.

(Continuará)

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1651
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL