TRATADO

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

POR EL MISMO PROFESOR

Continuación de la página 146, número 121

COROL.—Luego *si las proyecciones de un punto se hallan en las de una recta*, el punto estará en la recta; y viceversa. Porque si c, que está en ab, y c', en a'b', son las proyecciones del punto; como en virtud del principio enunciado [nº 37, 1ª], la proyectante respecto de *c* se halla en el plano proyectante que determina la ab; y la respecto de *c'*, en el plano proyectante determinado por la a'b'; se sigue que las dos líneas proyectantes, cortándose, tienen común uno de los muchos puntos comunes á los dos planos proyectantes: pero estos puntos originan la recta AB del espacio; luego ese punto es úno de los de esta recta; es decir, *tales proyecciones c, c' corresponden al punto C en que se cortan las líneas proyectantes indicadas, y se halla en la recta AB.*

VICEVERSA. si se halla C en la recta AB, ó es un punto de ésta; c, c' estarán respectivamente en ab, a'b'. En efecto, por ser la proyección de una línea el lugar geométrico de las proyecciones de todos sus puntos; ab, a'b' contendrán todas las proyecciones de los puntos de la AB; luego las de C, punto de esta recta.

NOTA. Como en el caso de un punto (nº 25), en el de una línea las proyecciones se llaman *horizontal* y *vertical*, según el plano de proyección donde están situadas.

40 **NUEVAS EXCEPCIONES.**—Aunque la proposición del nº 20, enunciada respecto del punto, es general, no lo es la análoga del nº anterior, con relación á la recta; porque son tres los casos en que, dadas las proyecciones, la *recta no es, sin embargo, conocida en el espacio, ó es indeterminada su posición, ó no existe del todo.* Tales son:

1º *Si las proyecciones horizontal y vertical, perpendiculares á la línea de tierra,* **no la cortan en un mismo punto.** En este caso, los planos proyectantes, determinados por las ab, a'b' (fig. 13, I), siendo perpendiculares á la línea de tierra, son paralelos entre sí; por lo cual no pudiendo cortarse, no fijan ninguna recta en el espacio; ó si se cortan, como lo hacen en el infinito, la recta se halla en el infinito. Luego *no es conocida, ó no existe recta alguna en el espacio finito.*

2º *Si las proyecciones horizontal y vertical, perpendiculares á la línea de tierra,* **la cortan en un mismo punto.** En este caso, los planos proyectantes, determinados por ab, a'b' (fig. 13, II), se confunden en uno solo perpendicular á la línea de tierra; y, como por el punto a–a' donde ésta lo corta se pueden trazar, en él, un número infinito de rectas, todas tendrán por proyecciones las ab, a'b': se ve pues, que hay recta correspondiente en el espacio finito; mas, por existir muchas ótras que reunen las mismas circunssancias, *es indeterminada la posición de la recta.* (Véase además el nº 38, Excep. 2ª)

3º *Si las proyecciones horizontal y vertical son,* **la úna perpendicular y oblicua la ótra á la línea de tierra.** Si, como en el caso III de la misma figura, la preyección oblicua á la línea de tierra es la horizontal ab, por lo que luego se verá (nº 47), la recta del espacio tiene de ser paralela ú oblicua al plano horizontal de proyección; y de úna y otra manera, oblicua á la línea de tierra. Mas el plano proyectante determinado por la proyección vertical a'b' $\perp$ LT, es perpendicular á ésta línea; y de aquí, el que todas las rectas posibles dibujadas en dicho plano, sean perpendiculares á la línea de tierra, ya la cortan ó no. De esta manera: por la úna de las proyecciones, la recta del espacio *tiene de ser oblicua á la línea de tierra;* y por la otra, *perpendicular á la misma línea*, posiciones incompatibles para una misma recta. Luego *la recta no existe del todo, por ser imposible su posición.*

Observación. Si las dos proyecciones no cortaran la línea de tierra en un mismo punto, como los planos proyectantes perpendiculares al horizontal de proyección, esto es, á aquel donde está la proyección oblicua á la línea de tierra, se cortarían en una recta perdendicular al mismo plano horizontal; ésta sería la única posible del espacio; pero entonces, por la posición que tiene coincidiendo con las proyectantes de todos los puntos de ella, *su proyección horizontal no puede ser sino un punto* (nº 38, Excep. 1ª). Luego el caso que estudiamos es sólo posible ó la recta podrá existir únicamente *cuando la proyección oblicua á la línea de tierra se reduzca á un punto:* así lo manifiesta la representación segunda del dibujo III (fig. 13), notándose que, por este hecho, el punto y la otra proyección se encuentran en línea recta, pudiendo el punto indicado hallarse en la línea de tierra ó á cualquier distancia de la misma.

41 **RESUMEN.**—Por lo demostrado en los dos números precedentes, *dos rectas cualesquiera consideradas respectivamente en los planos de proyección pueden ser las proyecciones de ótra del espacio*, si los planos proyectantes, por las rectas determinados, no resultan paralelos entre sí ni confundidos en uno solo ni perpendiculares los dos á alguno de los de proyección.

42 **CONSECUENCIAS.**—1ª *Una recta finita inclinada á un plano*, forma con su proyección sobre él, un trapecio, que tiene la proyección por altura; y por bases, las proyectantes de los extremos. En la figura 11, la línea finita AB, inclinada respecto del plano PQ sobre el cual se la proyecta, determina el cuadrilátero ABba, que es un trapecio por tener las proyectantes extremas Aa, Bb paralelas entre sí, lo que las constituye en bases; y como son además, perpendiculares á la proyección ab, ésta es la altura. Aho-

ra bien, si se traza por *a* la línea aG ‡ AB, á la que resulta igual, aG, ó la línea dada, *es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por el un cateto la proyección indicada; y por el ótro,* la

$$bG = Bb - BG = Bb - Aa;$$

esto es: *la diferencia de las proyectantes.* Así, la línea del espacio se expresará por

$$AB = aG = \sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{bG}^2} = \sqrt{\overline{ab}^2 + (Bb - Aa)^2}; \quad (3)$$

la proyección, por

$$ab = \sqrt{\overline{aG}^2 - \overline{bG}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 - (Bb - Aa)^2};$$

y como es aquélla la hipotenusa; y ésta, el úno de los catetos, resulta evidentemente

$$ab < AB;$$

esto es: *en el caso de una recta inclinada,* la proyección es menor que la recta.

2ª *Si la recta es paralela al plano,* se proyectará en su verdadera magnitud sobre éste. Lo que se infiere: *analíticamente;* porque si fuera, en la misma figura,

$$AB ‡ \text{pla. } PQ,$$

resultaría

$$Aa = Bb \text{ ó } bG = Bb - Aa = 0;$$

por lo que daría la (3)

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{ab}^2 + o} = \sqrt{\overline{ab}^2} = ab.$$

Gráficamente; porque, siendo en dicha figura,

$$AE \ddagger \text{pla. } PQ,$$

equidistan de éste todos los puntos de la AE; y así que el cuadrilátero AEba sea un paralelogramo (rectángulo en el sistema ortogonal); luego, como lados opuestos,

$$AE = ab.$$

3ª Por lo visto en el nº 38, *Excep.* 1ª y en la Observación, á lo 3º (nº 40), *la proyección sobre un plano de una recta perpendicular al mismo,* **es un punto, á saber: el de intersección de la recta y el plano.** Se infiere así, que para una misma recta finita L del espacio, *la magnitud de la proyección cambia inversamente con la inclinación de la recta al plano:* en caso de paralelismo, esto es, cuando la inclinación es un mínimo, la magnitud de la proyección es un máximo, quiere decir: *igual á la longitud de la recta;* y para una inclinación máxima, ó cuando la recta es perpendicular al plano, la magnitud de la proyección es un mínimo, á saber: *igual á un punto ó cero.* Luego si llamamos l la longitud de la proyección en el primer caso; y l', l'', l''', ... las que le corresponden creciendo la inclinación, resulta evidentemente

$$l > l' > l'' > l''' > \cdots\cdots > o. \qquad (4)$$

43 **NOTACION.**—Dase este nombre *á los métodos convencionales que se siguen para representar en descriptiva los elementos geométricos de una figura, con el fin de obtener en lo posible dibujos claros y sencillos.* Por esto, con antelación al estudio de las cuestiones principales que se ofrecen acerca de la recta, conviene indiquemos el sistema de que haremos uso en este **Tratado**, y que versará al pronto sobre la manera de dibujar las líneas de tierra, los puntos y las rectas.

Líneas de tierra. Se dividen en principales y auxiliares. Denomínanse *principales* las líneas de los planos de proyección que primero se consideran, y que los llamaremos *primitivos*, porque hay casos, como lo veremos después (n.os 100 y siguientes), en que, á más de ellos, se hacen necesarios otros planos: tales líneas se dibujarán de trazo continuo, con algún grueso y más ó menos largo, paralelo siempre á uno de los bordes del papel, como se indica en la letra A de la figura 14. Las *auxiliares*, que serán las de los nuevos planos de proyección que haya necesidad de considerar, pueden tener una dirección cualquiera respecto de las principales; y se dibujarán de trazos gruesos, pequeños, iguales y equidistantes, con alguna otra adición que se indicará después: tal es la línea B de la misma figura. Unas y otras líneas se designan, como lo hemos hecho ya, con las letras mayúsculas L, T puestas en los extremos.

Puntos. A más de designárselos de la manera ya dicha (nº 25, *Nota*), se los indicará en el dibujo por dos muy pequeñas líneas, rectas ó curvas, que se corten; por puntos, etc., etc., como en C.

Rectas. Se dividen en principales, auxiliares de construcción y de correspondencia. Son *principales* las que se consideran como dato, ó se obtienen como resultado: se dibujan las primeras de líneas ó trazos llenos ó continuos muy delgados, como la indicada con la letra D; las segundas, de líneas llenas, más gruesas que las anteriores, pero más delgadas que una línea de tierra principal: de esa clase es la señalada con la letra E: únas y ótras se designarán como en el caso del punto, es á saber: la recta del espacio, suponiéndola limitada, se indicará con letras mayúsculas puestas en los extremos; y las proyecciones, con las minúsculas correspondientes la horizontal; pero con los símbolos de la palabra *primas*, la vertical. La recta misma se expresará con las dos mayúsculas ó con los dos pares de minúsculas separadas por un guión: así, la recta del espacio, producida en la figura 12, diremos que es la AB ó la ab–a'b'.

Además, pueden hallarse tales líneas totalmente en el diedro principal, ó en los ótros, ó pasando de aquél á éstos: en el primer caso serán totalmente visibles, y se las representa como queda dicho; lo mismo el segmento que se halle en ese diedro en el tercer caso; mas para el que pasa ó está, mejor dicho, en los otros diedros, ó cuando se hallen las rectas totalmente en éstos, suponiendo opacos los planos de proyección, aunque infinitamente delgados, ocultarán las rectas del espacio ó las partes situadas por detrás de ellos, circunstancia que se significará en la representación dibujando las rectas proyecciones, mediante puntos delgados ó gruesos, según que se las considere camo dato ó como resultado: tales son los modelos designados con las letras F, G.

Las líneas auxiliares de construcción se llaman así, porque sirven para obtener de los datos los resultados: estas líneas se comprende que no tienen la importancia de las principales, pero son necesarias por las construcciones indispensables para resolver los problemas; y, vistas ú ocultas, se dibujan de trazos pequeños, delgados é iguales, intercalando entre ellos, uno, dos, tres ó más puntos, según el orden y sucesión de las operaciones que determinan la construcción: los modelos están señalados con las letras K, I, J.

Las líneas de las proyectantes ó, mejor dicho, *de correspondencia* son, como se sabe (nº 28, Observ. 1ª), las que unen las proyecciones de un mismo punto: estas líneas, tan indispensables en los casos en que es conveniente ó necesario ejecutar con precisión los dibujos, se distinguen de las anteriores, porque, de conformidad con el teorema del nº citado, se las construye siempre con una dirección perpendicular á las líneas de tierra; y se las forma de trazos pequeños, delgados, iguales y equidistantes, como la designada con la letra K, semejante á las de que ya hemos hecho uso en algunas de las figuras anteriores.

44 **TRAZAS DE UNA LINEA.**—Llámanse así *los puntos donde corta una línea los planos de proyección;* y, por contraposición á *pie* (nº 18), designaremos en general con el nombre de TRAZA *el punto donde una línea con una dirección cualquiera encuentra con un plano:* la traza será *pie* si tal dirección es la de perpendicularidad res-

pecto de éste; y en el caso de los planos de proyección, las trazas se denominan *horizontal*, *vertical*, según el plano donde se hallen: en todo lo que sigue la traza horizontal se indicará con la letra H; y con la V, la vertical, como se ha hecho en la figura 15, I, donde la recta AB se supone en perspectiva; pero en rebatimiento se las designará por sus proyecciones, á saber: la horizontal por h–h', y la verticas por v–v', como en lo II de la misma figura, que representa la AB ó ab–a'b' en descriptiva; y como las trazas son puntos respectivamente situados en los planos de proyección; para cada úna, la del mismo nombre del plano se encontrará en éste; y la de nombre contrario, en la línea de tierra (nº 32, III): así lo manifiestan las dos partes de la figura citada.

Las trazas son los puntos que, por lo indicado en la *Notación* tratándose de las rectas, separan los segmentos visible é invisible de las que se dirigen del diedro primero á los ótros, atravesando los planos de proyección; y como, por lo dicho entonces, hay que representar de línea llena aquél; y de puntos, éste; la determinación de las trazas tiene una grande importancia en el dibujo descriptivo; por lo cual con antelación pasamos á resolver el siguiente

(Continuará).