TRATADO DE FERROCARRILES

POR JOSÉ KOLBERG,

Profesor de Mecánica práctica y construcción de vías de comunicación en la Escuela Politécnica de Quito. (1875)

(Continuación).

Para una cierta curva dada se debe asignar á v un valor determinado, de manera que es

$$\frac{av^2}{gtg\vartheta}=C \qquad [33]$$

cantidad constante, por lo cual [32] toma la forma simple

$$y=\frac{x^3}{6C} \qquad [34]$$

Para la constante C se puede hallar otra expresión más sencilla que es independiente de la velocidad. Porque tenemos

$$h=\frac{av^2}{gR} \quad y \quad C=\frac{av^2}{gtg\vartheta}$$

luego eliminando v^2 se deduce

$$C=\frac{hR}{tg\vartheta}=lR \qquad [35]$$

Luego la constante de la curva (34) *es igual al radio multiplicado por la longitud de la parabólica de transición.* La última cantidad se calcula por medio de (31), dada la elevación de la parte circular de la curva, y la pendiente $tg\vartheta$ que se quiere dar al trecho de transición. Como á $tg\vartheta$ pueden darse varios valores entre ciertos límites, será también C en (34) susceptible de ellos, pudiéndose considerar como constante con valores algo variables.

La curva señalada en (34) es parabólica de tercer grado, la misma que se obtiene al poner un peso al extremo libre de una vara elástica, sujeta horizontalmente por el otro extremo. Dícese *línea elástica*, y tiene varias propiedades muy notables como son:

1º La curva y sus cocientes diferenciales tienen las ecuaciones

$$y=\frac{x^3}{6C}; \quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2C}; \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{C} \qquad (b)$$

Su radio de curvatura es

$$\rho=\frac{C}{x}\left(1+\frac{x^4}{4C^2}\right)^{3/2} \quad \text{ó simplemente} \quad \rho=\frac{C}{x} \qquad (c)$$

porque x es comunmente pequeño en comparación á C. La primera expresión que es exacta, tiene un mínimo $\rho=1{,}390\sqrt{C}$ para $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1}{5}}$, esto es, para la tangente de un ángulo $\alpha=24°\,6'$. Para ángulos menores que este, la diferencia entre el valor exacto y aproximado es muy pequeña. *El valor aproximado es inversamente proporcional á x.*

2º Varias curvas con distintos valores de C é idéntico origen tienen, inversamente proporcionales á esta constante, las ordenadas que corresponden al mismo valor de x.

3º Pero, las ordenadas correspondientes de dos curvas con idéntico origen son directamente proporcionales.

4º La subtangente es igual á la tercera parte de la abscisa; porque se tiene

$$\text{Subtg}=\frac{y}{y'}=\frac{x^3}{6C}:\frac{x^2}{2C}=\frac{x}{3} \qquad (d)$$

---

§ 39.

Unión de la curva circular con la parabólica de transición.

El círculo de la fig. 15 tiene la ecuación

$$R^2=(x-p)^2+[y-(R+q)]^2$$

si $p=AD$ y $q=OD$. Reduciéndola á y se tiene

$$y=R+q-\sqrt{R^2-(x-p)^2}=R+q-R\sqrt{1-\left(\frac{x-p}{R}\right)^2}$$

dando á la raíz cuadrada, sólo, el signo negativo que conviene á menores valores de *y*. La misma raíz puede convertirse en una serie, puesto que $\frac{x-p}{R}$ debe ser menor que la unidad. Así obtenemos

$$y=R+q-R\left\{1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x-p}{R}\right)^2-\tfrac{1}{8}\left(\frac{x-p}{R}\right)^4-\tfrac{1}{16}\left(\frac{x-p}{R}\right)^6\ldots\ldots\right\}$$

Supongamos que sea

$$\frac{R}{8}\left(\frac{x-p}{R}\right)^4=\frac{y}{m} \qquad \text{(a)}$$

entonces el tercer término del paréntesis, y los demás que siguen, podrán despreciarse, cuando *m* es un número bastante crecido, y tendremos solamente

$$y=q+\frac{(x-p)^2}{2R};\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x-p}{R} \qquad \text{(b)}$$

La primera de estas ecuaciones expresa la parte del círculo que tiene ordenadas pequeñas, apreciándose el grado de aproximación mediante [a]. Esta ecuación es realmente la de una parábola de segundo grado, resultando que un círculo siempre puede confundirse, por un corto trecho, con una cierta parábola de segundo grado.

Valiéndonos de las ecuaciones [b], será facil efectuar un tránsito contínuo desde la curva de transición á la parte circular de la curva.

A. *Unión exterior*. Se puede establecer la doble condición de que la parábola de transición y el círculo tengan, en el punto de unión, *idéntico radio de curvatura* R *y además la misma tangente*. Si *l* y *t* son las coordenadas del punto B de unión, se sacan las relaciones *para la curva de transición*, de [b] y [c] del § 38

$$t=\frac{l^3}{6C};\quad \operatorname{tang}\alpha=\frac{l^2}{2C};\quad R=\frac{C}{l}$$

y de [b] de este § se deduce *para el círculo*

$$t=q+\frac{(l-p)^2}{2R};\quad \operatorname{tang}\alpha=\frac{l-p}{R}$$

—

Desconocidas son las cantidades C, p, t, q, que se hallan facilmente por eliminación conveniente, siendo

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ C=lR & 3)\ t=\dfrac{l^2}{6R}=\tfrac{4}{3}\,f \\[2ex] 2)\ p=\tfrac{1}{2}l & 4)\ q=\dfrac{l^2}{24R}=\tfrac{1}{4}\,t=\tfrac{1}{3}\,f \end{array}\right\} \qquad [36]$$

en donde f designa la flecha AE. La expresión para C es la misma que ya hemos encontrado en (35), así que la parábola corresponde perfectamente á las velocidades del tránsito. La segunda ecuación anuncia que la parábola de transición cae por una de sus mitades sobre el trecho rectilíneo, y por la otra sobre el trecho circular, de manera que es AD=EB. La última relación indica que el trecho rectilíneo tiene que trasladarse lateralmente de una cantidad q=OD, que es igual á la tercera parte de la flecha AE, y á la cuarta parte de la flecha GB.

La expresión 3) para t puede servir para averiguar, si en la curva existe el grado de aproximación que se pide, sustituyendo aquella en la relación (a) arriba notada. Se consigue pues por los valores $y=t$, $x=l$, $p=\frac{1}{2}l$

$$\frac{R}{8}\left(\frac{\frac{1}{2}l}{R}\right)^4=\frac{t}{m}=\frac{l^2}{6mR}$$

ó bien

$$\frac{1}{m}=\frac{3}{64}\cdot\frac{l^2}{R^2}=\frac{9}{8}\cdot\frac{q}{R} \qquad [37]$$

El error en el punto de unión de la curva parabólica, es decir, la diferencia entre t en cuanto corresponde á la parábola de transición y al t en cuanto conviene al círculo, no excederá á $\frac{t}{m}$.

La solución del problema exige, pues, una traslación lateral del trecho rectilíneo; si esta no fuese posible, se podría trazar la parte circular con un radio menor, que será

$$R'=R-OD=R-\frac{l^2}{24R'}$$

El último término no se mudará sensiblemente, escribiendo R en lugar de R'; de manera que el nuevo radio es

$$R'=R-\frac{l^2}{24R} \qquad [38]$$

Por este procedimiento se traslada la curva, y queda en el mismo lugar tanto el trecho rectilíneo como el centro de la curva.

Sólo cuando no puede dislocarse ni el trecho rectilíneo ni el circular, lo que sucederá en el caso de ferrocarriles ya establecidos, se aplicará el segundo método de unión, que es el que sigue:

B. *Unión interior.* Cuando debe permanecer el trecho rectilíneo MA, se supone $q=0$, y como la parábola y el arco circular deben tener idéntica tangente en el punto de unión, se deducen las relaciones

para la curva de transición de (b) y (c) del § 38

$$t=\frac{l^3}{6C}; \quad \text{tang}\ \alpha=\frac{l^2}{2C}; \quad \rho=\frac{C}{x}$$

y *para la parte circular, de* ( ) § 39

$$t=\frac{(l-p)^2}{2R}; \quad \text{tang}\ \alpha=\frac{l-p}{R}$$

de donde resulta

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ C=\frac{3}{4}lR & 3)\ t=\frac{2l^2}{9R} \\ 2)\ p=\frac{1}{3}l & 4)\ \rho=\frac{3}{4}R \end{array}\right\} \qquad [39]$$

Un tercio de la parábola cae sobre la línea recta, y dos tercios caen sobre el círculo. El radio de curvatura que la parábola tiene en el punto B de la juntura, es solamente $\frac{3}{4}$ del radio del círculo, lo que no es un grande inconveniente,

Asimismo, la constante C es tan sólo $\frac{3}{4}$ del que tenía en el caso anterior y en la fórmula (35), resultando que la parábola de transición no corresponde con exactitud ni á la velocidad ni á la elevación de los carriles.

El grado de aproximación se determina por

$$\frac{1}{m}=\frac{l^2}{9R}=\frac{t}{2R} \qquad [39b]$$

relación que se deduce de (a) § 39 haciendo $x=l$, $p=\frac{1}{3}l$, $y=t=\frac{2l^2}{9R}$, y que manifiesta también la menor exactitud de esta unión, cuando se compara con la fórmula (37) del otro caso.

§ 40

Ejemplos de la unión exterior.

I. *Ejemplo.* Para dar un ejemplo de esta unión, que es la más práctica, elegimos el método de transición que se prescribe *en los ferrocarriles centrales de Orleans.*

1º *La elevación* se calcula según la fórmula § (22):

$$h=\frac{4500}{R}\ \text{centím.}=\frac{45}{R}\ \text{metros} \qquad \text{(I)}$$

2º *Se prescribe la pendiente* $\tan\vartheta = 0{,}00375$, lo que conduce á

$$C=\frac{hR}{\operatorname{tg}\vartheta}=\frac{45}{0{,}00375}=12000\ \text{metros} \qquad \text{(II)}$$

3º *La longitud de la curva de transición* es

$$l=\frac{C}{R}=\frac{12000}{R}\ \text{metros} \qquad \text{(III)}$$

4º *La dislocación lateral* del trecho rectilíneo es

$$q=\frac{l^2}{24\,R} \qquad \text{(IV)}$$

Estos valores y fórmulas conducen á la tabla siguiente:

Radios de la curva circular R	Elevación. $h = \frac{4500}{R}$ cent.	Longitud de la parábola $l = \frac{12000}{R}$ met.	Dislocación lateral $q = \frac{l^2}{24R}$
300 metros	15,0 centím.	40,00 metros	0,222 met.
350 ,,	13,0 ,,	34,28 ,,	0,140 ,,
400 ,,	11,2 ,,	30,00 ,,	0,094 ,,
450 ,,	10,0 ,,	26,67 ,,	0,066 ,,
500 ,,	9,0 ,,	24,00 ,,	0,048 ,,
600 ,,	7,5 ,,	20,00 ,,	0,028 ,,
700 ,,	6,4 ,,	17,14 ,,	0,017 ,,
800 ,,	5,6 ,,	15,00 ,,	0,012 ,,
900 ,,	5,0 ,,	13,33 ,,	0,008 ,,
1000 ,,	4,5 ,,	12,00 ,,	0,006 ,,
1200 ,,	3,7 ,,	10,00 ,,	0,003 ,,
1500 ,,	3,0 ,,	8,00 ,,	0,002 ,,
2000 ,,	2,2 ,,	6,00 ,,	0,001 ,,

5º Conocidas estas cantidades principales, se toma desde el punto tangencial A (fig. 15) un trecho $AD = p = \frac{1}{2}l$, y desde D otro trecho $OD = q$ en dirección normal á la anterior. El punto O será el origen de la parábola, y una recta OX paralela á MA, da la posición del trecho rectilíneo.

6º Luego se toma $OG = l$ y en G se levanta la normal $GB = t = 4q$, hallándose así el punto B de unión entre el círculo y la parábola, cuyo punto se halla también haciendo $AE = 3q$ y $EB = p = \frac{1}{2}l$. La flecha t siempre es muy pequeña ($= 4q$), de manera que DB, OB y OG son sensiblemente iguales.

La aproximación, que resulta de los valores de la tabla, es muy grande, puesto que de [37] para $R = 300$ metros y $l = 40$ metros, se deduce

$$\frac{1}{m}=\frac{3}{64}\cdot\frac{40^2}{300^2}=\frac{1}{1200}$$

y como $t=4q=0,888$, será

$$\frac{1}{m}=\frac{0,888}{1200}\text{ metros}=0,74\text{ milímetros}$$

de manera que el error admitido en la última ordenada de la parábola no llega á ser un milímetro. Mucho mayor aun es la exactitud para radios mayores.

7º La medida del ángulo β=ANB (fig. 15) es $\frac{AB}{R}$, y como AB, con grande aproximación, es=KG=$\frac{1}{2}l$, se tiene

$$\beta=\frac{l}{2R}=\frac{C}{2R^2} \qquad \text{(V)}$$

8º Las ordenadas se calculan directamente por medio de la ecuación de la parábola

$$y=\frac{x^3}{6.12000} \qquad \text{(VI)}$$

pero en este cálculo se deberá averiguar, si el último valor $y=t$ corresponde exactamente al que se halla midiendo en el terreno, ó bien la recta OG se calculará con exactitud, conforme al valor hallado de GB=t.

Pero, de la ecuación (VI) se infiere que $y : t=x^3 : l^3$, de donde

$$y=\left(\frac{x}{l}\right)^3 . t \qquad \text{(VII)}$$

Para obtener 3 *valores intermedios* póngase $x=\frac{1}{4}l,\ \frac{2}{4}l,\ \frac{3}{4}l$, resultará

$$0,0156\,t\,;\quad 0,1250\,t\,;\quad 0.4219\,t \qquad \text{(VIII)}$$

Para 5 *valorres intermedios* se debe poner $x=\frac{1}{6}.l\ \frac{2}{6}l\ldots\ ^5|_6 l$, por lo cual se tiene

$$0,0046\,t;\quad 0,0370\,t;\quad 0,1250\,t;\quad 0,2963\,t;\quad 0,5785\,t \qquad \text{(IX)}$$

Según esto, en primer lugar, se puede determinar OG haciéndola paralela á MD, se medirá t en el terreno, y se calcularán las ordenadas intermedias valiéndose de los valores (VIII) y (IX). Además la parábola siempre pasa por el punto medio de AK.

II. *Ejemplo.* En los ferrocarriles de Orléans sólo se admiten radios de 300^m ó mayores. Supongamos una curva con menor radio, por ejemplo con R=150^m. La elevación no puede ser excesiva ; tomarémosla =15 centímetros, lo que supone una velocidad moderada.

Según (37) es

$$\frac{1}{m}=\frac{3}{64}\cdot\frac{l^2}{R^2}=\frac{3h^2}{64R^2\,tg^2\,\vartheta}$$

obteniéndose una grande aproximación, cuando la elevación h es pequeña, y la pendiente tang ϑ grande. El mayor valor admisible de esta pendiente sea tang ϑ= 0,004; entonces la aproximación llegará solamente á

$$\frac{1}{m}=\frac{3.0,15^2}{64.150^2.0,004^2} \;;\quad m=341$$

Ahora será $l=\frac{h}{tg\,\vartheta}=\frac{0,15}{0,004}=37,5$ metros; $C=lR=$

$37,5.\ 150=5625$; $q=\frac{l^2}{24R}=0,3906$ metros.

La última ordenada es $t=4q=1,5624$ metros, y el error admitido$=\frac{1,5624}{341}=4,5$ milímetros.

Los valores intermedios de la ordenada se calcularán según las mismas fórmulas (VII) y (VIII) anteriores, más en vez de t se sustituirá el valor conveniente hallado por la medida hecha en el terreno.

COMBINACIÓN DE DOS CURVAS.

§ 41.

1r. caso: Las curvas están en el mismo sentido, es decir, se hallan al mismo lado de su tangente común, y esta es muy larga (fig. 17.)

Sean dos curvas con los radios R' y R'', y la distancia de los centros expresada por E. El trecho rectilíneo O' O'' tiene que pasar por los dos puntos K' y K'', cuyas distancias á los centros M' y M'' son respectivamente

$$\left.\begin{aligned}\rho' &= M'K' = R' + q' \\ \rho'' &= M''K'' = R'' + q''\end{aligned}\right\} \qquad [40]$$

y como ρ' y ρ'' son perpendiculares á O'O'', serán paralelas, resultando que K'K'' = T es la tangente común de dos círculos que al rededor de M' y M'' se describen con los radios ρ' y ρ''.

Aplícanse directamente para la unión exterior las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} O'G' = l' = \frac{C}{R'}; \quad A'K' = q' = \frac{l'^2}{24R'} \\ O''G'' = l'' = \frac{C}{R''}; \quad A''K'' = q'' = \frac{l''^2}{24R''}\end{aligned}\right\} \qquad [41]$$

en donde *C* es la constante que se prescribe para cada ferrocarril, calculada según la fórmula

$$C = \frac{h'R'}{\tang \vartheta} = \frac{h''R''}{\tang \vartheta} = \frac{hR}{\tang \vartheta}$$

Después de determinado q' y q'', se calcularán ρ' y ρ''.
La longitud de la tangente K'K'' es

$$T = \sqrt{E^2 - (\rho'' - \rho')^2}$$

La diferencia $\rho'' - \rho' = (R'' - R') - (q'' - q')$ es sensiblemente igual á R''—R', siendo así que comunmente se emplean radios que crecen de 50 en 50 metros, y que si es R'' = R', es también q'' = q'. Así es, que en vez de la última ecuación se puede escribir

$$T=\sqrt{E^2-(R''-R')^2} \qquad [42]$$

lo que es, igualmente, la expresión de la tangente común de los dos arcos circulares dados.

El ángulo α=M'M''K'' se halla por una de las relaciones

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{R''-R'}{E}; \quad \text{sen}\,\alpha=\frac{T}{E}=\sqrt{1-\left[\frac{R''-R'}{E}\right]^2} \\ \tan\alpha &= \frac{T}{R''-R'}=\sqrt{\left[\frac{E}{R''-R'}\right]^2-1} \end{aligned}\right\} \quad [43]$$

con lo cual, queda determinado todo lo que se necesita para el cálculo y construcción

La elevación en el trecho O'O'' es cero. Si O' coincidiese con O'', se formaría en este punto *un ángulo vertical*, es decir, que en este punto una rampa seguiría inmediatamente á una pendiente, lo que se debe evitar. Este inconveniente se haría aún mayor, si O' y O'' cambiasen de posición, porque entonces se formaría además un ángulo en el perfil horizontal. De donde se concluye que debe ser

$$T>O'K'+O''K'' \text{ ó bien } T>\tfrac{1}{2}(l'+l'')$$

esto es, que la *tangente común debe ser algo mayor que la mitad de la suma formada por las longitudes de ambas transiciones.*

Como

$$\tfrac{1}{2}(l'+l'')=\frac{C}{2}\left[\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right]$$

en caso de necesidad, se podrá disminuir algo *C* y aumentar tangϑ. El trecho rectilíneo O'O'' tiene suficiente longitud, si es igual á la del mayor carruaje que transita.

§ 42.

II° caso: Contracurvas; las curvas están situadas á diferentes lados de su tangente común.

Se resuelve del mismo modo, sólo que uno de los radios, por ejemplo R' pertenecerá á la hilera exterior de la una curva, y el otro R'', á la interior de la otra (fig. 18). Las ecuaciones (40) y (41) se aplican sin variación alguna, y en vez de las (42) y (43) se tiene

$$T=\sqrt{E^2-(R'+R'')^2} \qquad [44]$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha&=\frac{R'+R''}{E}\,; \quad \operatorname{sen}\alpha=\frac{T}{E}=\sqrt{1-\left[\frac{R'+R''}{E}\right]^2} \\ \operatorname{tang}\alpha&=\frac{T}{R'+R''}=\sqrt{\left[\frac{E}{R'+R''}\right]^2-1} \end{aligned}\right\} \qquad [45]$$

La hilera interior de la transición O'' B'' debe quedar en plano horizontal, y á su vez se aumentará la altura de los carriles exteriores que corresponden. Luego colocada la tangente O'O'', se señalará la paralela O_3 O_4 que da la posición de la segunda hilera, y se determinará á su continuación la parábola O_1 B''', teniendo por radio él de la hilera convexa.

Además, se verifica la misma condición de que *la tangente común* K'K'' *debe ser algo mayor que la suma de ambas transiciones*, y es preciso, que á la distancia horizontal O'O'' se dé también una extensión que sea, por lo ménos, igual á la longitud del mayor carruaje, á fin de que los ejes no sufran un descargue parcial, por el plano torcido que los rieles formarían.

Establécense en "*los principios*" *estas reglas*:

Entre dos curvas opuestas debe haber un trecho rectilíneo que tenga por lo ménos la longitud de 50 metros. En las rampas más empinadas no se emplearán sino curvas muy abiertas, y los cambios de pendiente se colocarán en líneas rectas, en cuanto sea posible.

Si suponemos C=12000, conforme á las instrucciones para los ferrocarriles de Orleans, tendremos, para curvas de 300ᵐ, que son las menores que allí se admiten, *la longitud de la transición*=40ᵐ. Dos contracurvas de este mínimo radio deben tener una tangente $K'K''>\frac{1}{2}(l'+l'')=\frac{1}{2}(40+40)$ ó bien$>40^m$, á lo que se deberá añadir la longitud del vagón más largo, resultando que la regla alemana aún satisface á los pequeños radios de 300ᵐ. Con curvas de mayor radio se podrá disminuir siempre aquella longitud de 50ᵐ, si fuese necesario.

La segunda parte de la regla de los principios es de grandísima importancia, y se explica ya por la resistencia que experimenta el tren en las curvas, ya por respecto á la seguridad necesaria.

§ 43.

III caso; Curvas en igual sentido, y la tangente común es muy pequeña (fig. 19).

Como en el primer caso, también aquí, se describen al rededor de los centros M′ y M″ dos círculos con los radios ρ' y ρ'', verificándose las mismas ecuaciones (40) y (41). Pero debiendo servir de transición una misma parábola, l' y l'' se contarán desde el mismo punto O. Si G′G″ se designa por λ y la tangente K′K″ por T, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= OG'' - OG' = l'' - l' \\ T &= OK'' - OK' = \tfrac{1}{2}(l'' - l') \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \lambda &= G'G'' = 2K'K'' = 2T \\ T &= \frac{\lambda}{2} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

$$T = \sqrt{E^2 - (\rho' - \rho'')^2} \qquad (b)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\rho' - \rho''}{E}; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{T}{E} = \sqrt{1 - \left[\frac{\rho' - \rho''}{E}\right]^2} \\ \operatorname{tang}\alpha &= \frac{T}{\rho' - \rho''} = \sqrt{\left[\frac{E}{\rho' - \rho''}\right]^2 - 1} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Las ecuaciones (b) y (c) son también las mismas que en el primer caso, pero retenemos ρ' y ρ'' en vez de los menos exactos R′ y R″, puesto que T y α son cantidades muy pequeñas, por ser casi E=R′—R″. Luego el primer caso, y este sólo, se diferencian por las relaciones (a) que conducen á un valor de la constante C, que varía en cada combinación de las cantidades dadas R′, R″ y E; puesto que de $T = \frac{1}{2}(l'' - l')$, cuando para l'' y l' se sustituyen sus valores, se dedece

$$T = \tfrac{1}{2}\left[\frac{C}{R''} - \frac{C}{R'}\right] = \frac{C}{2} \cdot \frac{R' - R''}{R'R''} \qquad [46]$$

$$C = \frac{2R'R''}{R' - R''} \cdot T \qquad [47]$$

$$C = \frac{2R'R''}{R' - R''} \sqrt{E^2 - (R' - R'')^2} \qquad [48]$$

de suerte que aquí para C y l sólo se pueden emplear las fórmulas

$$C = \frac{hR}{tg\vartheta}\ ; \quad l = \frac{h}{tg\vartheta}$$

cuando se determina la pendiente $tang\vartheta$ que corresponde, no siendo cantidad que puede darse directamente, por lo ménos si se supone constante el numerador $h\ R$ en la primera ecuación, según se suele hacer en muchos ferrocarriles. Pero la pendiente $tang\vartheta$ tiene un cierto límite, por ejemplo $tang\vartheta = 0,004$ que no puede traspasar, resultando que hay también un cierto límite de C y T, los cuales serán

$$C_1 = \frac{hR}{tang\vartheta}; \quad T_1 = \frac{R'-R''}{2R'R''} \cdot C_1 \qquad [49]$$

Para los ferrocarriles de Orleans, el valor constante de $h\ R$ es 45, y como no se puede hacer sin peligro $tang\vartheta$ mayor que 0,004, estos límites serán

$$C_1 = \frac{45}{0,004} = 11255; \quad T_1 = \frac{R'-R''}{2R'R''} .11255 \qquad (A)$$

Otro límite se obtiene aplicando la condición de exactitud (37). que se quiere dar á la unión parabólica, estableciendo la condición de que la última ordenada t'' que se halla por cálculo, no se diferencie de la exacta, sino en un cierto número n de milímetros.

Como

$$\frac{t''}{m} = \frac{3t''}{64} \cdot \frac{l''^2}{R''^2} = \frac{C_2{}^4}{128R''^7}$$

haciendo esta expresión igual á n milímetros, se obtiene

$$\frac{C_2{}^4}{128\ R''^7} = \frac{n}{1000} \text{metros}$$

C_2 designa el segundo límite; luego será

$$C_2 = \sqrt[4]{\frac{128nR''^7}{1000}}; \qquad T_2 = \frac{R'-R''}{2R'R''} \cdot C_2 \qquad [50]$$

El primer límite C_1 es cantidad constante para cualquier valor de R, y solo podría variar, cuando en pequeñas curvas se introduce un valor menor para h, moderando la velocidad. El segundo límite C_2 sólo depende del radio de la curva menor, y de la exactitud que se quiere alcanzar. Para curvas de 300^m, 350^m y 400^m será suficiente una exactitud de 2 milím., y para las demás de 1 milím.

Así se obtiene la tabla siguiente

$R'' = 300^m$	$C_2 = 15400$	$R'' = 700^m$	$C_2 = 57000$
$= 350^m$	$= 20000$	$= 800^m$	$= 72000$
$= 400^m$	$= 25000$	$= 900^m$	$= 88000$
$= 450^m$	$= 27000$	$= 1000^m$	$= 106000$
$= 500^m$	$= 32000$	$= 1200^m$	$= 150000$
$= 600^m$	$= 44000$	$= 1500^m$	$= 216000$

Hay también dos límites determinados para la distancia E de los centros, de las dos curvas circulares. Obtiénense por la ecuación $E^2 = T^2 + (\rho' - \rho'')^2$, sustituyendo en vez de T los límites T_1 y T_2. Como $\rho' - \rho''$ es sensiblemente igual á $R' - R''$, y siendo T muy pequeño en comparación á $R' - R''$, el valor de E será casi idéntico al de la diferencia de los radios, distinguiéndose de ésta tan sólo en una pequeñísima cantidad, que siempre es mucho menor que 1 metro.

La tabla siguiente contiene los valores de T_1 y T_2 para las diferentes combinaciones de curvas. Dada una tangente T, se podrá ver si está contenida ó no entre estos límites, y si es posible efectuar una transición parabólica, según este párrafo. La columna T_3 de la mínima tangente admisible según los §§ 41 y 42, en los casos de tangentes largas y contracurvas, siendo nula la elevación en medio de la curva de transición; la longitud de ésta siempre es el doble de la que corresponde á la tangente. En el número que expresa á T_3 da está contenida la longitud del trecho rectilíneo, que hemos supuesto en su mínimo igual á 4 metros, lo que es dos centímetros más que la mayor distancia de los ejes fijos. Pero si en el ferrocarril transitar al locomotoras con mayor distancia de ejes, se deberá añadisen valor de T_3 la mitad de este exceso.

	300			350			400		
	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3
300	0	0	42,00						
350	2,68	3,67	39,14	0	0	36,28			
400	4,69	6,42	37,00	2,01	3,57	34,14	0	0	32,00
450	6,25	8,55	35,33	3,57	6,35	32,47	1,56	3,47	30,33
500	7.53	10,27	34,00	4,82	8,57	31,14	2,81	6,25	29,00
600	9,38	12,83	32,00	6,70	11,91	29,14	4,69	10,42	27,00
700	10,72	14,67	30,57	8,04	14,29	27,71	6,03	13,40	25,57
800	11,72	16,04	29,50	9,04	16,07	26,64	7,03	15,63	24,50
900	12,56	17,11	28,66	9,83	17,46	25,81	7,81	17,36	23,67
1000	13,13	17,96	28,00	10,45	18,57	25,14	8,44	18,75	23,00
1200	14,07	19,25	27,00	11,38	20,24	24,14	9,38	20,83	22,00
1500	15,00	20,53	26,00	12,33	21,91	23,14	10,32	22,91	21,00
2000	15,94	21,02	25,00	13,27	23,57	22,14	11.26	25,00	20,00

	450			500			600		
	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3
450	0	0	28,67						
500	1,25	3,00	27,33	0	0	26,00			
600	3,13	7,51	25,33	1,88	5,33	24,00	0	0	22,00
700	4,44	10,66	23,91	3,22	9,14	22,57	1,34	5,24	20,57
800	5,47	13,13	22,83	4,22	12,00	21,50	2,34	9,17	19,50
900	6,25	15,00	22,00	5,00	14,22	20,67	3,13	12,22	18,67
1000	6,88	16,51	21,33	5,63	16,00	20,00	3,75	14,67	18,00

[Continuará]