TEORIA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

Y DE LOS MUROS DE CONTENSION Y REVESTIMIENTO.

POR

JOSE KOLBERG, S. J. — Profesor en la Universidad

(Continuación.—V. el nº 68, pág. 237)

ARTÍCULO II

ALTURA DE COHESIÓN

§ 10

Altura de cohesión y método de determinarla

Cuando en la ecuación del empuje actual que el muro sufre

$$D = \max \frac{\cos \rho\,(X \operatorname{sen} \varphi - cS \operatorname{sen} \alpha)}{\cos(\varphi + \varepsilon - \rho)} \qquad a)$$

se sustituye c = 0, resulta

$$D = \max \frac{X \cos \rho \operatorname{sen} \varphi}{\cos(\varphi + \varepsilon - \rho)},$$

valor que nunca puede ser negativo ó cero. Concluimos que cuando en las tierras sólo hay roce y ninguna cohesión, siempre debe haber un empuje actual contra la pared por pequeño que sea el peso X del prisma ó la altura H de las tierras, supuesto que su talud sea más empinado que el natural. Tierras de esta clase y suposición nunca pueden sostenerse por sí mismas, sino que en cualquier caso tienen necesidad de un muro de revestimiento.

Se comprende sin dificultad que así debe suceder.

Mas, si la cohesión c es distinta de cero, para pequeñas alturas H ó pequeños pesos X, el valor del empuje en (a) debe siempre ser negativo, hasta que con crecientes X sea finalmente igual á cero. Así pues, cuando la altura H de las tierras no sobrepuja á una determinada $h = AB$ (fig. 17), ellas se sostendrán por su cohesión sola, sin tener necesidad de muros de contensión, y si por esta parte AF hubiese tal muro, esta no sufriría empuje ninguno. Además, es evidente que en el caso de ser la altura $H = A'B'$ mayor que aquella determinada $h = AB$, sólo la parte inferior AA' tiene que resistir á un empuje. La porción AF de la pared podría omitirse en el caso de que por esta disminución del peso no se debilite demasiado su estabilidad.

La máxima altura h en que las tierras á favor de su cohesión pueden sostenerse por sí mismas sin muro de revestimiento, se llama *altura de cohesión.*

Ahora bien, para hallar la altura h de cohesión, conforme á lo dicho, se necesita que el empuje sea cero en el caso de su máximo, ó bien que sea

$$\left.\begin{array}{r} \text{máx } D = 0 \\ \text{luego también } \dfrac{dD}{d\varphi} = 0 \end{array}\right\} \qquad (b)$$

En la ecuación (a) sea para abreviar

$$\left.\begin{array}{l} Z = X \operatorname{sen} \varphi - cS \operatorname{sen} \alpha \\ N = \cos(\varphi + \varepsilon - \rho) \end{array}\right\} \qquad (c)$$

siendo ambas cantidades funciones de φ. Así es

$$D = \cos \rho . \frac{Z}{N} \qquad (d)$$

y para que esta xepresión sea igual á cero, es preciso que sea $Z = 0$, puesto que ni el factor $\cos \rho$ ni el divisor N pueden producir semejante resultado.

Pero si $Z = 0$, la segunda condición (b)

$$\frac{dD}{d\varphi} = \cos \rho \frac{d\left(\dfrac{Z}{N}\right)}{d\varphi} = \frac{\cos \rho}{N^2} \left[N \frac{dZ}{d\varphi} - Z \frac{dN}{d\varphi}\right] = 0$$

conduce á $\frac{dZ}{d\varphi} = 0$.

Así es que en lugar de las condiciones (b) se pueden escribir estas:

$$\left.\begin{aligned} Z &= X \operatorname{sen} \varphi - cS \operatorname{sen} \alpha = 0 \\ \frac{dZ}{d\varphi} &= \frac{d\,(X \operatorname{sen} \varphi - cS \operatorname{sen} \alpha)}{d\varphi} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Las cantidades X y S se expresan por la altura del prisma, que en nuestro caso es la altura h de cohesión. Además dependen X y S del ángulo φ, que el plano de fractura forma con el talud natural y que en el supuesto del máximo empuje toma un valor determinado que designamos por γ.

Sustituídos en las dos ecuaciones (e) los valores de X y S, como convienen á las diferentes configuraciones del terreno dado, se eliminará φ para hallar h.

El caso más práctico es cuando las tierras están limitadas en su parte superior por un plano FE (fig. 18). En el prisma AFK de la altura $h = AB$ tenemos

$$AK = S; \quad AF = \frac{h}{\cos \varepsilon}$$

$$X = g . \triangle\, AFK = \tfrac{1}{2} g . S . AF \operatorname{sen} FAK$$

$$= \tfrac{1}{2}\, gSh \frac{\operatorname{sen}\,(\alpha - \varphi - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$$

con lo cual Z toma la forma

$$Z = \tfrac{1}{2}\, gSh \frac{\operatorname{sen}\,(\alpha - \varphi - \varepsilon) \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varepsilon} - cS \operatorname{sen} \alpha$$

$$= [\tfrac{1}{2}\, gh \operatorname{sen}\,(\alpha - \varphi - \varepsilon) \operatorname{sen} \varphi - c \cos \varepsilon \operatorname{sen} \alpha]\, \frac{S}{\cos \varepsilon}$$

$$= y . S',$$

en donde para abreviar ponemos el primer factor $= y$ y el segundo $= S'$.

En la primera condición $Z = 0$, es por consecuencia cero el primer factor

$$y = \tfrac{1}{2}\, gh \operatorname{sen}\,(\alpha - \varphi - \varepsilon) \operatorname{sen} \varphi - c \cos \varepsilon \operatorname{sen} \alpha = 0 \qquad (f)$$

La segunda condición $\frac{dZ}{d\varphi} = 0$ ó bien

$$\frac{d\,(yS')}{d\varphi} = S'\frac{dy}{d\varphi} + y\,\frac{dS'}{d\varphi} = 0$$

supone $\frac{dy}{d\varphi} = 0$, puesto que en el segundo término es $y = 0$. Pero de (f) se sigue

$$\frac{dy}{d\varphi} = \tfrac{1}{2}\,gh\,[-\operatorname{sen}\varphi\cos(\alpha-\varphi-\varepsilon) + \operatorname{sen}(\alpha-\varphi-\varepsilon)\cos\varphi]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,gh\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-2\varphi)$$

Como esta cantidad debe ser $= 0$, se infiere que es

$$\alpha - \varepsilon - 2\varphi = 0; \quad \text{luego}$$

$$\varphi = \gamma = \frac{\alpha-\varepsilon}{2} \tag{15}$$

Determinado así el ángulo de ruptura, su valor puede sustituirse en (f) para hallar h. Resulta

$$\tfrac{1}{2}\,gh\,\operatorname{sen}^2\frac{\alpha-\varepsilon}{2} - c\cos\varepsilon\operatorname{sen}\alpha = 0$$

luego
$$h = \frac{2c}{g}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha-\varepsilon}{2}} \tag{16}$$

La relación importante (15) nos indica que:

El ángulo $\varphi = \gamma =$ KAJ *comprendido entre el plano de rompimiento y el talud natural es siempre la mitad del ángulo* FAJ *que forma la cara anterior de las tierras con este mismo talud natural. Luego para hallar el plano* AK *por donde las tierras se separan, basta dividir en dos partes iguales este último ángulo.*

Además es una propiedad muy notable el que *ni el ángulo* $\gamma =$ KAJ *de la rotura, ni la altura* h *de cohesión dependen de la dirección* FK *que tiene la superficie de las tierras;* porque ni la fórmula (15), ni la (16) contienen una condición relativa á esta dirección. Así que ambas cantidades permanecerán las mismas, ya sea horizontal ya sea más ó menos inclinada la superficie superior que termina las tierras.

Esta ley puede evidenciarse por el raciocinio siguiente. Si imaginamos que desde F la superficie superior varía de dirección, entonces quedando invariable la altura p = FG del triángulo AFK, su área varía proporcionalmente á su base AK; luego varía también X proporcionalmente á S y cS, es decir que el peso del prisma se muda en proporción con la cohesión ejercida á lo largo de AK. Además el roce desprendido en el propio plano es independiente de este y sólo depende del peso X en proporción directa. El peso X es la única fuerza motriz. y en el caso de la altura de cohesión, el roce y la cohesión son las únicas fuerzas resistentes: la primera aumenta ó mengua como las últimas; luego no se impide el equilibrio cuando á la superficie FK se le da otra dirección cualquiera.

Sin embargo, no nos será permitido deducir semejante conclusión, si la rotura no siempre se verifica según un plano perfecto, lo que no sabemos con seguridad, sobre todo en el caso de haber cohesión, como aquí suponemos. Luego, no se puede apreciar cuanta sea la exactitud de las fórmulas (15) y (16), si la superficie tiene otra dirección distinta de la horizontal.

Mas en la hipótesis de ser esta horizontal, las experiencias hechas en Austria por Martony evidencian suficientemente que el rompimiento se efectúa según un plano, aun en el caso de haber cohesión.

Para proceder con toda la exactitud posible y evitar errores de grande importancia, haremos en seguida la restricción que las tierras amontonadas hasta la altura de cohesión, estén limitadas encima por un plano horizontal.

Finalmente, las expresiones para γ y h en las fórmulas (15) y (16) son independientes también de ρ, lo que debe suceder, no habiendo un muro en donde el roce pueda desenvolverse.

§ 11

Fórmulas particulares para la altura de cohesión

El talud delantero de las tierras puede estar (fig. 19, 20 y 21):

1) *inclinado hacia su centro*, para $+\varepsilon$,
2) *vertical*, para $\varepsilon = 0$,
3) *inclinado al otro lado*, para $-\varepsilon$.

La altura de cohesión la designaremos en estos casos distintos por h, h_1 y h_2. Las fórmulas relativas se hallan de (16) por las sustituciones convenientes de ε. Además, dada la altura de cohesión, se podrá calcular la intensidad c de la última. Así se sigue:

Para un talud inclinado hacia el centro de las masas

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{2c}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha - \varepsilon}{2}} \\ c &= \tfrac{1}{2}\, g h \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha - \varepsilon}{2}}{\operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Para un talud vertical

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{2c}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4c}{g} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \\ c &= \tfrac{1}{4}\, g h_1 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Para un talud inclinado al otro lado

$$\left.\begin{aligned} h_2 &= \frac{2c}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \varepsilon}{2}} \\ c &= \tfrac{1}{2}\, g h_2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \varepsilon}{2}}{\operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Con lo cual una masa coherente puede tener un talud de cualquier especie, y se observa que en los tres casos señalados es

$$h > h_1 > h_2$$

Si en la primera fórmula (17) se hace $\varepsilon = \alpha$, será $h = \infty$, lo que se debe verificar; pues para $\varepsilon = \alpha$ el talud de las tierras se convierte en el talud natural, y el resbalo hacia abajo es imposible, por grande que sea la altura.

La fórmula para h_2 en el tercer caso sólo es aplicable, si el ángulo ε no es demasiado grande, porque dividiendo en dos partes iguales al ángulo FAJ que el talud forma con el natural, podría resultar un prisma de máximo empuje FAK cuyo centro de gravedad no estuviese más sostenido por la base AB de la masa, hallándose fuera de la vertical AN á su izquierda y produciendo una nueva fuerza de giro, al rededor de A. Como este caso es poco práctico, sólo atenderemos á los dos primeros representados en las (fig. 19 y 20), los cuales conducen á conocer la cohesión de las tierras por medio de experimentos y cálculos.

§ 12

Cálculo de la cohesión

La segunda fórmula (17) puede servir para hallar la intensidad de la cohesión c por metro cúbico y expresada en kilogramos. A este fin se deben medir el ángulo ε del talud de las tierras y la altura h de cohesión, es decir la altura en que las tierras pueden sostenerse por su cohesión sola ó sea por sí mismas sin tener necesidad de un muro. El ángulo α que el talud natural forma con la vertical, está dado por la tabla I, y de la misma manera también el peso g por metro cúbico.

La misma intensidad de la cohesión puede hallarse también por la segunda fórmula (18) que es más simple; de manera que se evita medir el ángulo ε, siendo sólo necesario observar la altura h_1 supuesto que sean dados el talud natural, el peso g y el ángulo α.

Estos métodos, pues, suponen conocido el talud natural. Pero hay otro, además, que á la vez da la cohesión c y el talud natural ó sea el ángulo α. Supongamos que una tierra dada se corte una vez según un ángulo ε' y otra vez según el ε'', y que cada vez se observen las alturas correspondientes h' y h'', hasta las cuales el terreno se puede sostener por sí mismo; entonces por la segunda fórmula (17) tendremos las dos relaciones:

$$h' = \frac{2c}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon'}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon')}$$

$$h'' = \frac{2c}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon''}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon'')}$$

que forman un sistema de dos ecuaciones que bastan para hallar las incógnitas α y c.

A este fin, eliminando en primer lugar á c, se tiene por división

$$\frac{h'}{h''} = \frac{\cos \varepsilon' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon'' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon')}; \text{ de donde}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon'')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon')} = \sqrt{\frac{h' \cos \varepsilon''}{h'' \cos \varepsilon'}}$$

El primer miembro equivale á

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \varepsilon'' - \cos \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon''}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \varepsilon' - \cos \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon'} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \varepsilon'' - \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon''}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \varepsilon' - \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon'}.$$

Luego si para abreviar se escribe

$$\sqrt{\frac{h' \cos \varepsilon''}{h'' \cos \varepsilon'}} = m, \tag{20}$$

se tendrá

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \varepsilon'' - \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon''}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \varepsilon' - \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon'} = m$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha \left(\cos \tfrac{1}{2} \varepsilon'' - m \cos \tfrac{1}{2} \varepsilon'\right) = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \varepsilon'' - m \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \varepsilon'$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon'' - m \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon'}{\cos \frac{1}{2} \varepsilon'' - m \cos \frac{1}{2} \varepsilon'} \tag{21}$$

El valor de m se conoce; luego está conocido también α. Sin embargo, para tener una fórmula que no tenga sino las cantidades dadas, se puede sustituir el valor de m; de donde resulta bajo otra forma

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon'' \sqrt{h'' \cos \varepsilon'} - \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon' \sqrt{h' \cos \varepsilon''}}{\cos \frac{1}{2} \varepsilon'' \sqrt{h'' \cos \varepsilon'} - \cos \frac{1}{2} \varepsilon' \sqrt{h' \cos \varepsilon''}} \tag{22}$$

Ahora, el valor de c se halla por cada una de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} c &= \tfrac{1}{2} g h' \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon')}{\operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon'} \\ c &= \tfrac{1}{2} g h'' \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon'')}{\operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon''} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Si un talud, por ejemplo el primero, fuese vertical, será $\varepsilon' = 0$; luego según las fórmulas (21) y (23) tendremos

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon''}{\cos \frac{1}{2} \varepsilon'' - m} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon''}{\cos \frac{1}{2} \varepsilon'' - \sqrt{\frac{h'}{h''}} \cos \varepsilon''} \tag{24}$$

$$c = \tfrac{1}{2}\, gh' \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{4}\, gh' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha \qquad (25)$$

Ejemplo. Para hallar las constantes del empuje α y c, que convienen á un terreno de tierras vegetales movedizas y poco húmedas, se le ha cortado una vez verticalmente encontrando $h' = 0{,}3$ metros, otra vez según un plano oblicuo con $\operatorname{tang} \varepsilon'' = 7/15$, hallándose $h'' = 1$ metro.—Aplíquense las ecuaciones (24) y (25).

$$\begin{aligned} \log \sqrt{\frac{h'}{h''} \cos \varepsilon''} &= 0{,}47712 - 1 \\ &\;\; + 0{,}95727 - 1 \\ \hline &= 1{,}43439 - 2 : 2 \\ &= 0{,}71719 - 1 \\ \sqrt{\frac{h'}{h''} \cos \varepsilon''} &= 0{,}5214 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \varepsilon'' &= 0{,}4666 \\ \varepsilon'' &= 25^\circ \\ \cos \varepsilon'' &= 0{,}9063 \\ \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon'' &= 0{,}9763 \\ \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\varepsilon'' &= 0{,}2164 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{0{,}2164}{0{,}9763 - 0{,}5214} = \frac{0{,}2164}{0{,}4549} = 0{,}4757$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 25^\circ\, 26{,}4' \qquad \alpha = 50^\circ\, 52{,}8' \qquad (I)$$

Este resultado suministra el talud natural. Para determinar la constante c, se habrá de pesar además un metro cúbico de las tierras. Sea el peso así encontrado $g = 1174$ kilogramos. Tendremos.

$$c = \tfrac{1}{4} . 1174 . 0{,}3 . 0{,}4757 = 41{,}89 \text{ kilogramos.}$$

Sería importante repetir semejantes experimentos para que las constantes del empuje sean más conocidas que lo son hasta ahora. A este fin el terreno se deberá cortar por tres lados, siendo el medio bastante largo.

Continuará.