TEORIA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

Y DE LOS MUROS DE CONTENSION Y REVESTIMIENTO.

POR

JOSE KOLBERG, S. J. — Profesor en la Universidad

NOCIONES PRELIMINARES

§ 1

Tierras amontonadas y sus propiedades relativas al movimiento

Con el nombre de *masas de tierra*, ó simplemente de *tierras*, entendemos en este tratado, cualesquiera amontonamientos de cuerpos con mayor ó menor tamaño, *que sólo por el roce y adhesión toman una cierta forma en su perfil total*, siendo así que sin dichas propiedades deberían fluir á semejanza de los líquidos. Luego, por tierras se entiende todo amontonamiento de tierras vegetales, arenas, gravas, arcillas, escombros, ripios, aserraduras, trigo, balas, perdigones &ª Las tierras son semejantes á los líquidos perfectos, 1º por su *movilidad* con que, obedeciendo á la acción atractiva del globo terrestre, pueden resbalar y escurrir unas de sus partes sobre otras, y 2º por la *necesidad que tienen de estar encerradas* entre paredes fijas para que tengan un volumen determinado; si bien no es tan endeble su adherencia interior, porque mientras que la superficie de las aguas, en el estado de equilibrio, siempre es horizontal, la de las tierras, al contrario, puede afectar mayor ó menor inclinación con el horizonte.

Las causas porque en las tierras unas partes se adhieren á las otras y así resisten muchas veces á la acción de las fuerzas que tienden á hacerlas resbalar, pueden reducirse á las dos siguientes:

1. *Al roce*, que se verifica entre los cuerpecillos de que las tierras constan. El roce es el resultado de *las desigualdades y de la dureza* de las superficies con que dos cuerpos que deben moverse uno sobre otro, se tocan; y además, *es efecto de la presión recíproca*, por cuya razón el roce crece con la profundidad en que los cuerpos se hallan colocados en un amontonamiento. Por fin, como su forma es muy variable é irregular, se formarán entre ellos muchas concavidades y agujeros, haciendo muy desiguales los planos del resbalo. Así, siendo muy grande la movilidad de una cantidad de perdigones por la forma redonda que tienen, la tendencia del movimiento será mucho menor en un montón de escombros y piedras toscas. Cuando los cuerpos que componen una masa movible, tienen un tamaño considerable, se podrá sustituir en su lugar una masa fina y muy divisible, que tenga idéntica resistencia de roce, y por esta sustitución se pueden aplicar los cálculos infinitesimales, que suponen una divisibilidad ilimitada de la materia.

2. *A la cohesión* de la masa amontonada, que en realidad es la adhesión entre sus partes. Esta cohesión es muy pequeña y puede despreciarse en muchos casos, como en tierras vegetales saturadas de agua, en arenas secas, ripios y piedras toscas, trigo &.ª Al contrario, puede ser muy considerable en tierras vegetales poco humedecidas y compactas, y en arcillas húmedas, y finalmente puede crecer su intensidad hasta que sea imposible hacer distinción entre una masa de tierra y un cuerpo sólido.

§ 2

Talud natural

Sea un plano inclinado AB (fig. 1) sobre el cual reposa un cuerpo M del peso p; buscaremos el ángulo de inclinación β que el plano inclinado debe formar con el horizonte AC, para que el cuerpo exactamente esté en equilibrio con la fuerza que le empuja hacia abajo. La línea vertical KM representa el peso p ó sea la fuerza vertical de gravedad; descomponiéndola en dos fuerzas LM y NM, una paralela, otra perpendicular al plano inclinado, la primera $LM = p \text{ sen } \beta$ será la que solicita al cuerpo á resbalar hacia abajo. La segunda $NM = p \cos \beta$ es la presión normal, y se sabe que á ésta es proporcional el *roce* r entre el cuerpo y el plano inclinado, siendo

$$r = f.NM = f.P \qquad (a)$$

en donde $P = NM$ designa la *presión normal* sobre el plano inclinado y f es el *coeficiente del roce*, cantidad constante para un mismo par de superficies de toque, pero variable según la naturaleza de éstas. De donde se sigue, que en nuestro caso el rozamiento es $r = f.p \cos\beta$, el que, oponiéndose al movimiento, producirá equilibrio, si es igual á la fuerza impelente LM, resultando así que en el caso de quilibrio debe ser $f.p \cos\beta = p \operatorname{sen}\beta$ ó bien

$$f = \operatorname{tang}\beta; \quad r = P \,.\, \operatorname{tang}\beta \tag{1}$$

esto es: que respecto de *un cuerpo colocado sobre un plano inclinado, habrá exactamente equilibrio entre el roce producido y la fuerza que tiende a hacerle resbalar hacia abajo, si el coeficiente del roce es igual á la tangente trigonométrica del ángulo, que el plano inclinado forma con el horizonte.* Se ve además que el *roce siempre es igual á la presión multiplicada por la tangente del ángulo de rozamiento*, con cuyo nombre se designa el ángulo β del plano inclinado en dicho caso de equilibrio. Este ángulo se halla, dando al plano inclinado cada vez mayores inclinaciones con el horizonte AC. El menor ángulo posible $BAC = \beta$ con que resulta el resbalo, es el ángulo del rozamiento. Si el ángulo del plano inclinado BAC es menor, que el del rozamiento, el cuerpo reposará sobre el plano con cierta estabilidad, que será tanto mayor, cuanto sea menor dicho ángulo; pero si éste fuese mayor que el del roce, el cuerpo resbalaría hacia abajo con tanta mayor rapidez, cuanto mayor sea el mismo ángulo BAC del plano inclinado.

Una masa amontonada de tierras permanecerá en equilibrio, siempre que su superficie inclinada AC (fig. 2) no forme con el horizonte AB mayor ángulo, que el del rozamiento β entre las partes movibles. Porque si $\sphericalangle CAB > \beta$, no podrá quedar en equilibrio cualquier cuerpo de la misma masa puesto sobre su declive CA; sino habrá de resbalar hacia abajo, lo que no sucederá si $\sphericalangle CAB \leqq \beta$.

Denomínase *talud natural* de una masa de tierras amontonadas tanto el plano inclinado AC, como la relación AB : BC entre su proyección horizontal y altura, si las tierras amontonadas se hallan en el caso estremo de equilibrio, es decir, cuando el ángulo $\beta = CAB$ formado por la cara anterior y el horizonte, es el mayor posible. El *ángulo del talud natural* BAC es á la vez el ángulo del roce, verificándose las relaciones sencillas:

$$\left.\begin{aligned} f = \operatorname{tang}\beta = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\text{talud}} \\ \text{talud} = \frac{AB}{BC} = \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{f} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

El coeficiente del roce es el valor recíproco del talud natural, resultando que por las observaciones de éste, se puede hallar aquel. Como el coeficiente *f* del roce se expresa por la tangente del ángulo β del rozamiento, así el talud natural queda expresado por la tangente del ángulo α que es el complemento de β.

Todo lo que acabamos de explicar, supone que no haya más que roce en las tierras de que se trata; pero, si además del roce hubiese cohesión, sería evidente que el talud AC formaría con el horizonte un ángulo CAB mayor que el que corresponde al roce sólo, por lo menos en una masa recién amontonada. La acción de la lluvia, del frío y calor es contraria á la de la cohesión, y así se comprende que por los influjos atmosféricos el talud AC bajará cada vez más, hasta que con el tiempo, el ángulo CAB sea un mínimo, que entonces exactamente corresponde al roce sólo. Así pues, *en las tierras que tienen cohesión, el talud natural es el que corresponde á un ángulo mínimo de talud y al efecto del roce sólo.* Se puede hallar su magnitud, secando bien y pulverizando los materiales de que la masa consta; pues entonces la cohesión es nula y el talud se debe sólo al roce. Sinembargo, más tarde veremos un procedimiento, que sirve á la vez para hallar el talud natural y la cohesión de tierras coherentes.

La tabla siguiente suministra el talud natural y peso por metro cúbico, para diferentes materiales.

TABLA I

Especies de tierra:	Talud natural		Peso g por metro cúbico en klgramos.
	α	tang α	
Tierra vegetal, movediza, seca ó un poco húmeda	48°—52°	1,1—1,3	1240—1418
„ „ seca y apelmazada	48°—52°	1,1—1,3	1600—1770
„ „ movediza y saturada de agua	55°—60°	1,4—1,7	1770—1880
Arena, seca ó un poco húmeda	53°—56°	1,3—1,5	1650—1770
„ saturada de agua	60°—63°	1,7—2	1950—2040
Arcilla, muy fina, seca ó un poco húmeda	48°—52°	1,1—1,3	1510—1560
„ apelmazada	48°—52°	1,1—1,3	1690—1900
„ saturada de agua	55°—60°	1,4—1,7	1950—2040
Ripios, sin tierra vegetal	48°—50°	1,1—1,4	1600—1770

Los números de esta tabla sólo tienen valores aproximados.

§ 3

Muros de contensión y empuje de las tierras

Conforme á lo que hemos visto en el último párrafo, una masa movible M de tierras (fig. 3) tiene necesidad de estar sostenida por un muro ó pared ABEG, siempre que su cara anterior AB haya de formar con el horizonte AD, un ángulo BAD que sea mayor que el ángulo CAD del talud natural. El espesor del muro debe calcularse según la mayor ó menor presión que sufre; porque como la masa del prisma ABC tiende constantemente á hallar su talud natural, según la recta A'C', paralela á AC, claro está que el muro se ve bajo la acción constante de un *empuje, que depende del peso específico de las tierras, de la altura* AB *de la pared, del ángulo* BAD *de su inclinación al horizonte, de la dirección que tiene la superficie* BC *de la masa movible, y finalmente del roce y cohesión que se verifican en su interior y sobre la pared.*

Paredes de esta especie se llaman *muros de contensión ó revestimiento,* y la presión que sufren en su paramento interior se conoce con el nombre de *empuje de tierras,* si bien en realidad se puede hacer la distinción siguiente respecto de los muros y del empuje:

Cuando un terreno (fig. 4) tiene el declive natural CC' y se le debe cortar para hacer una carretera ó ferrocarril, la pared inferior I debe sostener tanto el empuje del terreno A'B'EBC, como la presión variable causada por los carruages y trenes, mientras que la pared II sólo tiene que resistir al empuje constante de la masa ABC. Dícese la pared inferior I *muro de contensión ó también de contrafuerte,* y la superior II se llama *muro de revestimiento.*

Por lo que toca al empuje de las tierras, se debe distinguir también dos especies. Es *activo* en el caso que hemos considerado hasta ahora, porque la masa movible de las tierras tiende como un agente físico á derribar ó hacer resbalar el muro hacia atrás. Pero si imaginamos que en la fig. 3 la pared sea movible, y que en su cara anterior se aplica una fuerza F de grande empuje, entonces la masa M retrocederá; la fuerza F sufrirá una cierta resistencia que es el *empuje pasivo* de las tierras. *El empuje activo es idéntico á la presión ejercida por las tierras, y el empuje pasivo lo es á su resistencia.*

El roce y la cohesión siempre ayudan á la fuerza pasiva que sólo resiste á otra activa; con lo cual, es evidente, que el empuje pasivo de una masa amontonada es mucho más considerable que el activo.

La *magnitud del empuje activo* se mide por la mínima fuerza F que es suficiente para resistirle, y la magnitud del empuje pasivo tiene por medida la mínima fuerza F que basta para hacer retroceder la masa. Pero, como toda especie de tierras es más ó menos compresible, no debe confundirse el movimiento debido á su compresibilidad, con el que corresponde á su empuje pasivo, y que se manifiesta sólo cuando la parte correspondiente de la masa se halla comprimida hasta un máximo.

Por fin, el paramento interior de la pared puede ser vertical ú oblicuo. En el último caso al ángulo YAB (fig. 5) comprendido entre la vertical AY y el paramento interior, le designaremos por ε, contándole desde la vertical y dándole un sentido positivo, si la cara AB está inclinada hacia el centro de las tierras que deben sostenerse. En el caso contrario, cuando la cara interior AB del muro, se halla inclinada al otro lado, ε será negativo.

El talud del paramento suele expresarse por la relación que hay entre su proyección horizontal BD y altura AD, lo que es lo mismo que designarle por la tangente trigonométrica del ángulo ε. Los valores de tang ε, que se emplean con mayor frecuencia, son tang $\varepsilon = 0, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}$. La tabla II contiene las cantidades relativas que se necesitan en los cálculos.

TABLA II

tg. ε	ε	cos ε	$\frac{1}{\cos \varepsilon}$	tg. ε	ε	cos ε	$\frac{1}{\cos \varepsilon}$
0	0	1	1	$\frac{1}{8}$	7°7′30″	0,9923	1,0078
$\frac{1}{12}$	4°45′49″	0,9965	1,0035	$\frac{1}{6}$	9°27′44″	0,9864	1,0138
$\frac{1}{10}$	5°42′38″	0,9950	1,0050	$\frac{1}{5}$	11°18′36″	0,9806	1,0198
$\frac{1}{9}$	6°20′25″	0,9938	1,0062	$\frac{1}{4}$	14°2′11″	0,9701	1,0308

§ 4

Presión lateral de los líquidos

Un líquido perfecto está compuesto de partes que no manifiestan ni roce ni cohesión sensible. Aun el rozamiento, que se produce entre un líquido y la pared del recipiente es cantidad de ningún valor asignable. Las tierras se diferencian de los líquidos sólo en su menor movilidad, resultado del roce y cohesión; y así claro está que de cualquiera teoría verdadera del empuje de tierras, debe seguirse la teoría exacta de los líquidos, si la intensidad del roce y cohesión se supone igual á cero.

Las fórmulas, pues, que expresan el empuje de los líquidos contra sus paredes, sirven para asegurarse de que sean verdaderas las que se desarrollan respecto del empuje de las tierras. Es verdad, que esta comparación de ambas clases de ecuaciones no es señal infalible de no haber error en las del empuje de tierras; sin embargo, toda teoría acerca del último será manifiestamente falsa, si no se sigue de ella la verdadera de los líquidos.

1) Sábese por la hidrostática que, un líquido L limitado por una pared vertical AB (fig. 6) ejerce, sobre cualquiera parte infinitamente pequeña M de ésta, una presión que se mide por el prisma BM del líquido, que tiene M por base y la distancia MB al nivel por altura.

Si AC se hace igual á AB, MN paralela á AC, la presión lateral en A se representará por AC, y la en M por MN, puesto que será $MN = MB$. A otro punto M′ corresponde una presión que se representa por M′N′. Concluimos que el empuje total contra la pared AB se representa por el triángulo ABC, ó más bien por el prisma que tiene este triángulo ABC por base, y por altura la longitud de la pared normal á la cara del papel. Esta longitud la tomaremos por todo este tratado, constantemente igual á la unidad, es decir á 1 metro.

Si llamamos al prisma ABC *la representación gráfica* de la presión del líquido sobre la pared AB, entendemos con eso que el peso de dicho prisma es idéntico á esta presión.

Así mismo, el prisma MM′N′N es la representación gráfica de la presion lateral que la pared sufre en su parte MM′, puesto que el peso del primero es igual á esta presión.

El volumen del prisma ABC es $= \frac{1}{2}\, AB.AC.1 = \frac{1}{2}\, H^2$; luego si *g* designa el peso específico, ó sea el peso de un metro cúbico del líquido, se tendrá la

$$\text{presión horizontal } D = \tfrac{1}{2}\, H^2\, g \qquad (3)$$

suponiendo una pared vertical.

2) En el caso opuesto, ó sea cuando la pared AB está *inclinada*, formando con la vertical un ángulo ε, la *presión normal* se puede hallar por la ley bien conocida de que, bajo iguales circunstancias, las presiones normales son como las magnitudes de las superficies que sufren la presión. Tómese en la pared una parte *ab* infinitamente pequeña, cuya proyección vertical sea *bc*; entonces, si *d′* y *d* son las presiones normales respectivas en estas superficies pequeñísimas, tendremos

$$d' : d = ab : bc = AB : AD = 1 : \cos \varepsilon$$

$$d' = \frac{d}{\cos \varepsilon}$$

La pared AB puede dividirse en una infinita multitud de partes; y para cada una de ellas hallaremos respectivamente las siguientes ecuaciones

$$d'_1 = \frac{d_1}{\cos \varepsilon}; \quad d'_2 = \frac{d_2}{\cos \varepsilon}; \quad d'_3 = \frac{d_3}{\cos \varepsilon}$$

$$\text{de donde resulta } \Sigma d' = \frac{\Sigma d}{\cos \varepsilon}$$

esto es, que la presión normal D′ sobre la pared oblicua AB equivale á la presión normal D sobre una pared vertical, cuando esta última presión se divide por el coseno del ángulo que la pared oblicua forma con la línea vertical:

$$D' = \frac{D}{\cos \varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{H^2 g}{\cos \varepsilon}.$$

Si hacemos $\varepsilon = 0$, este caso se convierte en el anterior, resultando la ecuación (3), por lo cual podemos escribir en forma más general:

$$\text{presión normal } D = \frac{1}{2} \frac{H^2 g}{\cos \varepsilon} \tag{4}$$

Hágase AC = AB (fig. 7), y será el triángulo ABC la *representación gráfica* del empuje normal que el líquido ejerce contra la pared oblicua AB:

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2} AC.AD = \frac{1}{2} AB.AD = \frac{1}{2} \frac{H}{\cos \varepsilon}.H = \frac{1}{2} \frac{H^2}{\cos \varepsilon}$$

$$\text{peso del prisma } ABC = \frac{1}{2} \frac{H^2 g}{\cos \varepsilon}$$

conforme á la ecuación (4).

El empuje sobre MM′ se representa por el prisma M′MN′N.

El centro O de la presión (fig. 8) está situado en la recta SO que pasa por el centro S de gravedad del triángulo (prisma) ABC y es paralela al nivel. Luego será

$$AO = \frac{2}{3} AB; \quad OP = \frac{2}{3} H.$$

Continuará.