TEORIA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

Y DE LOS MUROS DE CONTENSION Y REVESTIMIENTO.

POR

JOSE KOLBERG, S. J. — Profesor en la Universidad

(Continuación. — V. el n.º 67, pág. 150)

CAPÍTULO I

EMPUJE ACTIVO Y PASIVO DE LAS TIERRAS

ARTÍCULO I

DISCUSIÓN GENERAL SOBRE EL EMPUJE ACTIVO

§ 5

Forma de la fractura producida por el empuje activo

Por ahora no haremos restricción alguna respecto de la inclinación de la pared, ni de la superficie superior en que las tierras terminan, ni de su peso específico, ni de las relaciones que existen respecto del roce y de la cohesión, por manera que todas estas circunstancias se toman en toda su generalidad. Sólo supondremos que el muro de contensión tenga por paramento interior un plano y que su base sea perfectamente sólida, no pudiendo el muro resbalar sólo sobre ella ni juntamente.

Si un muro AB (fig. 9) sufre un empuje por los materiales amontonados tras de él, es á causa de separarse en el terreno unas partes de otras, debilitándose su coherencia mutua, debida al rozamiento y á la cohesión, de donde el peso es la única causa activa de la separación. Así se forma un cierto prisma de tierras ABZ que se separa de las demás, el cual por su peso X tiende constantemente hacia abajo y por esta tendencia produce el empuje lateral contra la pared.

Cuando el roce y cohesión son cantidades invariables, como lo suponemos y como debe suceder con el tiempo, dicho prisma ABZ tendrá no solamente un peso invariable y una configuración cierta y determinada, sino que será también tan grande como es posible bajo las circunstancias dadas del roce y cohesión. El empuje *actual* que el muro sufre ó que sufrirá, por lo menos con el tiempo, y que debe calcularse para determinar las dimensiones convenientes del muro, se produce por el prisma que causa el máximo empuje posible y que se llama *prisma del máximo empuje.*

Así pues, *para determinar el empuje actual á que debe resistir una pared, se tiene que buscar el prisma del máximo empuje, es decir que de todos los prismas que pueden separarse de la masa, se debe buscar el que es capaz de producir el máximo empuje bajo las circunstancias dadas de cohesión y rozamiento.*

El problema sería mucho más sencillo, si conociésemos la forma de la línea AZ por donde la masa amontonada tiende á henderse. Esta línea ó superficie, aunque es verdad, que debe tener una forma regular, cuando la superficie BZ es un plano, según se ha demostrado últimamente por *métodos rigurosos de la mecánica;* no obstante, en la suposición contraria, no ha sido hasta ahora posible determinar su forma exacta, ni aun si será recta ó curva. Sin embargo la experiencia constante nos asegura que en los más de los casos prácticos es admisible la hipótesis de que *la fractura siempre se verifica según un plano perfecto, cuando la masa consta de partes homogéneas,* hipótesis que todos los ingenieros hasta el día la admiten y toman por fundamento de sus cálculos.

§ 6

Dirección del empuje y de la resistencia que la pared debe ejercer

En todos los cálculos que se siguen, suponemos que la longitud de la pared y de las masas que están detrás, es perpendicular al perfil ó sea á la cara del papel, contándose esta longitud siempre desde la base A del perfil, y siendo igual á la unidad que es el metro.

Por el empuje que los materiales del relleno ejercen, sufre cada parte de la pared (fig. 10) *una presión normal* infinitamente pequeña, á la que debe resistir con igual intensidad y dirección. Todas estas fuerzas infinitamente pequeñas y paralelas entre sí se componen formando una resultante D de finita intensidad y dirigida en el mismo sentido, normalmente á la cara interior de la pared.

Además, se desprende un roce entre la pared y las tierras, el cual dirigido de abajo hacia arriba paralelamente al plano interior del muro, resiste al movimiento que tiende á verificarse en la masa; y aunque sea infinitamente pequeño el roce en cualquiera parte infinitésima del muro, su suma ó el rozamiento total R será cantidad finita y se dirige también de abajo hacia arriba en toda la extensión de la pared.

El punto de aplicación M (fig. 11) es siempre común para cualquier elemento de resistencia d y para el roce r causado por este mismo elemento. Si designamos por μ el coeficiente de este roce y por ρ el ángulo de roce que corresponde, tendremos

$$r = \mu . d$$

$$\operatorname{tang} \rho = \frac{r}{d} = \mu$$

de donde se sigue que la resultante δ se desvía de la presión normal d con un ángulo que es igual al del roce. Como el coeficiente del roce es idéntico por toda la superficie en donde la pared y las tierras se tocan, será también ρ idéntica cantidad en todos los puntos del muro; luego serán paralelas entre sí también todas las resultantes δ para cada punto, las cuales, (fig. 12) por ser paralelas, componen una resultante oblicua Δ de la misma dirección. Cuando ésta se resuelve en una fuerza normal y otra paralela á la pared, estas componentes serán idénticas á D y R de la fig. 10.

Tenemos $\Delta = \Sigma\delta$, $D = \Sigma d$ y $R = \Sigma r$, y el punto de aplicación es común para estas sumas. Además el ángulo comprendido entre D y Δ es $= \rho$ (fig. 13), resultando

$$R = D \operatorname{tang} \rho \qquad (5)$$

$$R = \Delta \operatorname{sen} \rho \qquad (6)$$

$$\Delta = \frac{D}{\cos \rho} = \frac{R}{\operatorname{sen} \rho} \qquad (7)$$

$$D = \Delta \cos \rho \qquad (8)$$

El empuje total de las tierras, según esto, debe tener una resultante Δ' igual, pero opuesta, á Δ.

Ténganse aquí presentes las siguientes advertencias:

1ª Tomaremos siempre el empuje normal D como cantidad variable que dependa de todas las demás dadas y especialmente del peso y de la configuración del prisma del empuje.

2ª Este prisma del empuje que puede ser el del máximo ú otro se supone hallarse en el *estado de equilibrio labil*, en que empieza á desprenderse de los demás materiales del relleno Claro está que á cada prisma distinto se debe oponer otra resistencia D para que dicho estado de equilibrio labil se verifique.

3ª En este mismo estado, el rozamiento que puede desarrollarse, todo se emplea en oponerse al movimiento actual. Así, pues, los coeficientes del roce

$$f = \text{tang}\,\beta, \quad \mu = \text{tang}\,\rho$$

siempre se cuentan con todo su valor. Si en alguna parte el roce es menor que en otra, será la consecuencia de menor presión y no de falta de absorción del roce.

4ª Bajo las suposiciones expuestas sucederá que para un menor prisma, cuyo empuje no basta para separarlo de la otra masa, el valor D de éste salga negativo; porque no hallándose en el equilibrio labil, sino pegado con cierta coherencia á las demás tierras, este prisma no ejerce empuje positivo ninguno contra la pared, y se le debería añadir además otra fuerza activa, sólo para que su acción contra el muro sea igual á cero. Esta cantidad que le falta es entonces su empuje negativo. Para un valor D negativo sale también negativo el rozamiento R en la pared, conforme á la ecuación (5). Aunque este caso sea tan sólo imaginario, este método de considerar el empuje ayudará mucho mucho para hallar sus leyes.

5ª Finalmente, por lo que toca á la aplicación práctica, el roce verificado en la pared nunca se tomará con un valor que sea mayor que la suma del roce y cohesión que tienen lugar en la masa cercana á la pared. Porque si el roce en la pared es mayor que la última suma, las tierras no se separarán de la pared AF (fig. 14), sino que se romperán según una línea *a b*, que está á pequeñísima distancia, paralela á AF, porque allí la resistencia es menor. Esta condicióu puede señalarse por la desigualdad que

$$\text{debe ser} \qquad R \leqq fD + \frac{CH}{\cos\,\varepsilon} \qquad (9)$$

en donde *f* designa el coeficiente del roce en èl interior de la masa y C la intensidad de su cohesión por metro cuadrado. Como $R = D$ tang ρ y $f =$ tang β, la relación (9) se podrá escribir también en la forma

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang} \rho \leqq \operatorname{tang} \beta + \dfrac{CH}{D \cos \varepsilon} \\[2ex] \mu \leqq f + \dfrac{CH}{D \cos \varepsilon} \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Así pues, hallándose alguna vez el valor de ρ ó μ mayor que el marcado en el segundo miembro de estas desigualdades, sólo se les atribuirá en el cálculo este último.

§ 7

Fuerzas que actúan en el equilibrio labil de un prisma de tierras, terminado por una fractura plana

Sea AF la cara interior de la pared (fig. 15), FK la superficie superior de las tierras, AK el plano supuesto del rompimiento.

Las fuerzas que se equilibran, son

la fuerza normal D, ejercida por la pared y que equivale al empuje normal..................	D
el roce sobre la misma pared.....................	R
la fuerza normal á la fractura AK...............	V
el roce á lo largo de esta misma fractura.......	r
la cohesión también según la misma............	C
el peso del prisma AFK.........................	X
Además sean el talud natural................	AJ
el ángulo del talud natural.......................	β
su complemento..................................	α
el ángulo entre la ruptura y el talud natural....	φ

Las fuerzas D y R componen la resultante Δ, que es la resistencia oblicua del muro y forma con D el ángulo ρ del roce.

El roce desprendido en el plano AK es $r = V . \operatorname{tang} \beta$ (1), porque β es el ángulo del talud natural y por consecuencia el del rozamiento en el interior de las tierras. V y r componen igualmente una resultante W, y el ángulo comprendido entre V y W será el del roce β.

Así es que no tenemos más que las cuatro fuerzas

$$\Delta, W, C, X.$$

Por lo que toca á C, ésta se expresará por

$$C = c.S \qquad (11)$$

si c designa la cohesión por metro cuadrado en kilogramos, y si S es la longitud del plano AK.

Cada una de las fuerzas Δ, W, C si se resuelve en sus componentes horizontales y verticales, tendremos

$$\left.\begin{matrix}\Delta' = \cos\,(\Delta\rho-\varepsilon)\\ \Delta'' = \mathrm{sen}\,(\Delta\rho-\varepsilon)\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}W' = W\,\mathrm{sen}\varphi\\ W'' = W\cos\varphi\end{matrix}\right\} \begin{matrix}C' = C\,\mathrm{sen}\,(\alpha-\varphi) = cS\,\mathrm{sen}\,(\alpha-\varphi)\\ C'' = C\cos\,(\alpha-\varphi) = cS\cos\,(\alpha-\varphi)\end{matrix}$$

A éstas se añade la fuerza vertical X.

§ 8

Fórmula general para el equilibrio del mismo prisma

El equilibrio labil exige que sea igual á cero tanto la suma de las fuerzas horizontales como la de las verticales:

$$\Delta' - W' + C' = 0$$
$$X - \Delta'' - W'' - C'' = 0$$

Cuando se sustituyen los valores arriba notados, se tienen las dos ecuaciones:

$$\Delta \cos\,(\rho-\varepsilon) - W\,\mathrm{sen}\,\varphi + c\,S\,\mathrm{sen}\,(\alpha-\varphi) = 0$$
$$X - \Delta\,\mathrm{sen}\,(\rho-\varepsilon) - W\cos\varphi - c\,S\cos\,(\alpha-\varphi) = 0$$

Para eliminar la incógnita W, multiplíquese la primera ecuación por $\cos\varphi$ y la segunda por sen φ, y hecho esto, réstese la primera de la segunda. Sale

$$X\,\mathrm{sen}\,\varphi - \Delta\,[\cos\varphi\cos\,(\rho-\varepsilon) + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,(\rho-\varepsilon)]$$
$$- c\,S\,[\mathrm{sen}\,\varphi\cos\,(\alpha-\varphi) + \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,(\alpha-\varphi)] = 0$$

ó bien cuando se reducen los grandes paréntesis

$$X\,\mathrm{sen}\,\varphi - \Delta\cos\,(\varphi+\varepsilon-\rho) - c\,S\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$$

de donde se puede sacar *el empuje oblicuo*,

$$\Delta = \frac{X\,\mathrm{sen}\,\varphi - c\,S\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\,(\varphi+\varepsilon-\rho)} \qquad (12)$$

El empuje normal es $D = \Delta\cos\rho$; luego

$$D = \frac{\cos \rho \ (X \ \text{sen} \ \varphi - cS \ \text{sen} \ \alpha)}{\cos \ (\varphi + \varepsilon - \rho)} \tag{13}$$

En donde las cantidades constantes y dadas son la cohesión *c*, el talud natural que se expresa por α, la inclinación de la pared ε y el ángulo del roce ρ para la pared. El prisma varía con el ángulo φ, así que X y S son cantidades variables que dependen de este ángulo, que es la sola variable independiente.

Empuje actual contra la pared

El empuje actual que la pared sufre es el más grande posible; luego se hallará por el valor máximo que la ecuación (13) suministra:

$$\text{empuje actual } D = \text{máx.} \frac{\cos \rho \ (X \ \text{sen} \ \varphi - cS \ \text{sen} \ \alpha)}{\cos \ (\varphi + \varepsilon - \rho)} \tag{14}$$

Tal máximo debe siempre darse, sea cual fuere la forma de la superficie superior y la intensidad del rozamiento y de la cohesión. Porque si φ crece suficientemente, se disminuirá el peso del prisma hasta el límite cero. Por otra parte, si φ se disminuye hasta cero, el plano AK coincidirá con el talud natural, y aun podrá recibir una posición menos empinada, y claro está que entonces el empuje se hace otra vez igual á cero. Entre estos dos valores iguales á cero hay valores positivos, y por lo tanto también un máximo.

Sin embargo, como la f rmula (14) contiene una diferencia en el numerador, podría suceder que todos los valores de D fuesen negativos, para lo que bastaría un valor grande de la cohesión *c*. En este supuesto el muro no sufre ningún empuje actual, sosteniéndose las tierras por su sola cohesión. Con $c = 0$ desaparece dicha diferencia, resultando que entonces siempre debe encontrarse un máximo.

Para determinar el valor máximo de D, es conocido que se debe resolver con respecto á φ la ecuación

$$\frac{dD}{d\varphi} = 0$$

y el valor de φ así encontrado y sustituído en la ecuación (14) conduce al máximo de D. Además, para que este valor de D sea verdaderamente un máximo y no un mínimo, el segundo cociente diferencial tiene que ser negativo. Perc de esta última diferenciación nos podemos dispensar, pues según hemos dicho se sabe que D tiene un máximo.

§ 9

Aplicación de la fórmula á los líquidos

Ya queda dicho que la fórmula del empuje producido por las tierras debe proporcionar la de la presión lateral de los líquidos, á cuyo fin basta poner

$$\rho = 0,\ \beta = 0 \text{ ó } \alpha = 90^\circ,\ c = 0.$$

Por estas sustituciones las relaciones (12), (13) y (5) se convierten en

$$D = \Delta = \frac{X \operatorname{sen} \varphi}{\cos(\varepsilon + \varphi)} \tag{a}$$

$$R = 0 \tag{b}$$

El último resultado que expresa el rozamiento en la pared, es evidentemente verdadero. En la ecuación que precede, se deberá sustituir el valor del peso X de cualquiera prisma y en seguida determinar el máximo. A este fin basta la suposición de una superficie horizontal, pues ésta es el nivel de un líquido y corresponde á la condición $\beta = 0$ y $\alpha = 90^\circ$.

Sea AF la pared, AFK un prisma cualquiera (fig 16). Tendremos

$$\begin{aligned} X &= g . \triangle AFK = \tfrac{1}{2} g . AB . FK \\ &= \tfrac{1}{2} g H (BK - BF) \\ &= \tfrac{1}{2} g H^2 (\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{tang} \varepsilon) \\ &= \tfrac{1}{2} H^2 g . \frac{\cos(\varepsilon + \varphi)}{\cos \varepsilon \operatorname{sen} \varphi} \end{aligned}$$

Este valor sustituído en (a) hace resultar

$$D = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \tag{c}$$

por el empuje normal de cualquiera prisma de un un líquido sobre la pared del recipiente. Esta presión se manifiesta ser independiente de φ, de manera que siempre queda invariablemente la misma, sea cual fuere la dirección que se dé al plano AK. Buscando ahora el máximo de D en cuanto depende de φ, no existirá más, puesto que la expresión de D en la fórmula (c) no depende de este ángulo: esto es que cualquier prisma imaginable del líquido produce el máximo de la presión lateral. Finalmente la ecuación (c) así hallada, es perfectamente idéntica á la que hemos encontrado más arriba en la relación (4).

Así pues, las leyes del empuje producido por las tierras, se verifican aplicándolas á la presión lateral de los líquidos.

Continuará.