

---

# TRATADO

DE

# GEOMETRIA DESCRIPTIVA

POR EL MISMO PROFESOR

Continuación de la página 218, número 122

PROBLEMA. *Determinar las trazas de una recta dada por sus proyecciones.*

RESOLUCIÓN. El punto donde la recta toque en uno de los planos de proyección, tendrá la proyección de igual nombre en el mismo punto (nº 32, III); y como la proyección sobre un plano de una línea cualquiera es el lugar geométrico de las proyecciones de todos sus puntos (nº 36), se hallará además, esa proyección, en la proyección de la línea situada en el plano que se considera; y por lo recordado [nº 32, III], el punto tendrá la proyección de nombre contrario en la línea de tierra; pero esta proyección, por igual motivo, estará también en la proyección de la recta situada en el otro plano; luego será el punto común ó el en que se corten la segunda proyección de la recta y la línea de tierra, determinando las dos proyecciones del punto una línea perpendicular á la última (nº 28, Teor.) Por lo expuesto las trazas de una recta dada, se fijan en virtud de la siguiente

REGLA. *Prolónguese si es necesario una de las proyecciones hasta cortar la línea de tierra, y en este punto levántese una perpendicular á la misma línea, que encuentre con la proyección de nombre contrario, prolongada si es menester: el punto de encuentro es la traza del nombre de esta proyección.*

Se ve así en la figura 15, II, que la perpendicular á la LT mediante la  $a'b'$ , da la traza horizontal  $h-h'$ , ó del nombre de la  $ab$ ; y, por medio de ésta, la perpendicular á la misma LT, la traza vertical  $v-v'$  ó del nombre de la  $a'b'$ : por suponerse pues, el segmento HV de la recta situado en el diedro principal, la parte de línea á la izquierda de  $h-h'$ , se la ha dibujado, de conformidad con lo establecido en la *Notación*, mediante puntos; pues que esa parte, atravesando el plano horizontal en  $h-h'$ , se hace invisible en el diedro cuarto; lo mismo vale para el segmento del segundo diedro desde  $v-v'$  á la derecha; pero las proyecciones del segmento HV que es visible, se han representado de línea llena ó trazo continuo.

45. DIFERENTES POSICIONES DE UNA RECTA DEL ESPACIO.—Puede tener respecto de los planos de proyección en perspectiva, las posiciones que se indican en el siguiente

CUADRO

		Número de posiciones
Generales	Oblicua á los planos de proyección y á la línea de tierra,	no cortándola,..... 4
		cortán- { de cualquier modo, 2 dola { en los planos bisect. 2 4
Paralela	al plano horizontal y oblicua al vertical	encima del horizontal,.... 1
		en el horizontal ..... 1
		debajo del horizontal ..... 1 3
Paralela	al plano vertical y oblicua al horizontal	delante del vertical,..... 1
		en el vertical ..... 1
		detrás del vertical ..... 1 3
Particulares	á la línea de tierra.	generales ..... 4
		en los planos bisectores... 4
		en las cuatro regiones de los planos de proyección } . 4
		en la línea de tierra ..... 1 13
		—
Perpendicular	al plano horizontal	delante del vertical,..... 1
		en el vertical ..... 1
		detrás del vertical ..... 1 3
Perpendicular	al plano vertical	encima del horizontal,.... 1
		en el horizontal ..... 1
		debajo del horizontal ..... 1 3
Perpendicular	á la línea de tierra..	oblicua á los planos bisectores } . 4
		sin cortarla } perpendiculares á éstos } . 4 8
		cortándola { de cualquier modo.. 2 } en los planos bisectores } . 2 4
Total de las posiciones diferentes.....		45

46. POSICION EN DESCRIPTIVA DE LAS PROYECCIONES DE UNA RECTA.—Como en el caso del punto [nº 32], principiaremos con

I Las posiciones generales. A) *Oblicua á los planos de proyección y á la línea de tierra: 1º, sin cortarla.* Se manifiesta una de las posiciones de esta clase en la figura 15, I: los planos proyectantes, ya respecto del horizontal, ya respecto del vertical, forman un diedro cualquiera con el otro plano de proyección; de aquí es que el ángulo rectilíneo correspondiente [nº 26, nota á la Consecuencia 2ª], formado por la intersección del diedro con el horizontal en el primer caso, ó con el vertical en el segundo, y cuyos lados son la línea de tierra y una de las proyecciones de la recta, tenga un valor cualquiera, obtuso ó agudo. En otros términos: *las indicadas proyecciones tienen en este supuesto una dirección oblicua á la línea de tierra sin cortarse en ningún punto de ella;* pues que por no hacerlo esta línea y la recta del espacio, los cuatro planos, á saber, los dos proyectantes y los dos de proyección, no pueden tener ningún punto común.

Como de conformidad con lo dicho en el nº 45, el segmento HV comprendido entre las trazas puede hallarse en el diedro 1º, 2º, 3º y 4º, resultan las cuatro posiciones indicadas en la figura 16: el dibujo 2º resulta, porque la recta, atravesando de izquierda á derecha la parte superior del plano vertical, se hace visible en el diedro

AS; y el 4º, porque atravesando en el mismo sentido la parte anterior del horizontal, se hace igualmente visible en ese diedro.

2º, *cortándola.* Vale para el actual lo dicho en el caso anterior, respecto de los ángulos diedros que forma cada uno de los planos proyectantes con uno de los de proyección; como sobre el mayor ó menor valor, agudo ú obtuso, del ángulo rectilíneo determinado por la intersección del diedro con el otro plano de proyección; por lo que *las proyecciones de la recta tienen una dirección oblicua á la línea de tierra, cortándola en un mismo punto.* Lo último porque, en virtud de cortarse la recta del espacio y la línea de tierra, el punto de encuentro ó común, lo sera también de los planos proyectantes: de aquí que el plano horizontal de proyección, pasando por la línea de tierra, pase por ese punto; y así, que *pase por el mismo*

la intersección de este plano con el proyectante respecto de la proyección horizontal de la recta ó sea esta proyección; y por igual causa, que pase también por el punto indicado la proyección vertical de la recta.

En tal supuesto, la recta se dirige del diedro primero al tercero, y, del segundo al cuarto; por lo que las proyecciones en descriptiva serán como las representa la figura 17: en el dibujo 1º, que corresponde á lo primero, las partes punteadas, prolongaciones de las llenas, *se hallan, como éstas*, en cada diedro, á distinto lado de la línea de tierra, formando ángulos agudos ú obtusos con la misma; en el 2º, que corresponde á lo segundo, las proyecciones, totalmente dibujadas de puntos, se hallan, en cada diedro, al mismo lado de la línea de tierra.

B). *Cortándola, pero oblicuamente, en los planos bisectores.* Se determinan las posiciones en virtud del siguiente

LEMA. *Las proyecciones de una recta situada en el plano bisector de uno de los diedros, pero que corta oblicuamente la línea de tierra, hacen con ésta ángulos iguales.*

Si LTD [fig. 18] es el plano bisector del diedro XLTY, plano en el cual está la recta AB que corta oblicuamente en B la línea de tierra LT, siendo aB, a'B las proyecciones de la recta; tiene de verificarse

$$\sphericalangle a_0Ba = a_0Ba'$$

**Demostración.** Pues, por lo visto en el *Lema* del nº 32, II, un punto situado en el plano bisector de un ángulo diedro, equidista de sus caras: así, que todos los puntos de la línea AB equidisten de XLT, YLT, equidistancias que, como se sabe, se miden por las perpendiculares bajadas de esos puntos á estas caras; y así que los pies de ellas, cuyos lugares geométricos son las aB, a'B, sean las proyecciones de la recta AB; luego por ser triángulos rectángulos que tienen la hipotenusa común y un cateto igual por el mismo *Lema*, es

$$\triangle ABA \cong ABA', \text{ ó } Ba = Ba';$$

y también, por tener tres lados respectivamente iguales, resulta

$$\triangle Ba_0a \cong Ba_0a'; \text{ luego } \sphericalangle a_0Ba = a_0Ba'.$$

L. Q. D. D.

Esto supuesto, y considerando la figura 18 en rebatimiento, vale para la representación de las proyecciones de la recta AB todo lo dicho en el caso A), 2º; esto es: *una recta situada en los planos bisectores y que, cortando oblicuamente la línea de tierra, se dirige del diedro 1º al 3º, tiene las proyecciones á distinto lado de esta línea, y forman con ella ángulos iguales; pero si la dirección es del diedro 2º al 4º, ó viceversa, dichas proyecciones, por la igualdad de los ángulos indicados, se confundirán en una sola.*

Tales posiciones son las que se representan en la figura 19: el dibujo primero lo es de la recta que va del diedro 1º al 3º: las partes llenas se refieren al segmento visible, por hallarse en aquél; y las punteadas, al invisible, por estar situado en éste. El dibujo 2º lo es de la recta dirigida del diedro 2º al 4º ó viceversa, pero invisiblemente.

II Posiciones particulares. *A) Paralela á uno de los planos de proyección: 1º, al horizontal, pero oblicua al vertical.* Como la distancia ó altura de un punto sobre el plano horizontal es igual á la distancia que hay de la proyección vertical á la línea de tierra (nº 26, Consc. 3ª); por ser la recta paralela á ese plano, todos los puntos de ella tendrán sobre él la misma altura; luego todos los puntos de la proyección vertical de la recta distarán igualmente de dicha línea: quiere decir que *la proyección vertical es paralela á la línea de tierra.* Pero, como el diedro formado entre el plano proyectante respecto del horizontal y el vertical de proyección, tiene un valor cualquiera, el rectilíneo correspondiente, producido por la intersección del plano horizontal, cuyos lados son la proyección horizontal y la línea de tierra, tendrá también un valor cualquiera; en otros términos: *la proyección horizontal es oblicua á la línea de tierra.*

Por lo visto en el cuadro, la recta del espacio puede tener tres posiciones, que son: encima del plano horizontal, en este plano y debajo del mismo; de aquí que sólo cambie en los tres casos, como lo manifiesta la figura 20, la posición de la proyección vertical, que estará encima de la línea de tierra en el primero, como lo indica el dibujo 1º; en esta línea, en el segundo, como lo indica el dibujo 2º; y por debajo de la misma en el tercero, como indica el dibujo 3º. En el segundo caso, para significar que la proyección se encuentra en la línea de tierra, se ponen unos pequeños trazos á corta distancia sobre dicha línea; y en el tercero, las proyecciones se dibujan de puntos, por hacerse invisible la recta del espacio.

2º *Paralela al vertical pero oblicua al horizontal.* Con sólo cambiar *horizontal, plano horizontal con vertical, plano vertical*, el razonamiento precedente manifiesta que *la proyección horizontal es paralela á la línea de tierra; y la vertical, oblicua á la misma.*

Los dibujos 1º, 2º y 3º de la figura 21 se refieren á los tres casos que pueden ocurrir, según que la recta se halle delante del plano vertical, en este plano y detrás del mismo: en el primero la proyección horizontal estará debajo de la línea de tierra; en esta línea, en el segundo; y encima de la misma, en el tercero; todo de una manera análoga á lo explicado respecto de la figura 20.

RESUMEN Lo dicho en los dos casos precedentes puede expresarse diciendo: que *si una recta es solamente paralela á uno de los planos de proyección, la proyección de nombre contrario resulta paralela á la línea de tierra: y la del mismo nombre, oblicua.*

B) *Paralela á la línea de tierra.* Este caso, como aparece del cuadro, se subdivide en los siguientes:

1º *Posiciones generales.* Razonamos entonces de la siguiente manera: como se sabe, que "Si una recta es paralela á otra situada en un plano fuera de aquélla, es también esa recta paralela á este plano;" en el caso que estudiamos, la recta del espacio tiene de ser, á un tiempo, paralela á los planos horizontal y vertical de proyección, por serlo á la línea de tierra situada al mismo tiempo en estos planos; y como se sabe igualmente, que "Si

por una recta paralela á un plano se traza otro secante, la intersección de los dos es paralela á dicha recta;" resulta, que las intersecciones de los planos proyectantes de la recta del espacio, con los planos de proyección, ó sean las proyecciones de la recta, son paralelas á ésta; luego son dichas proyecciones paralelas á la línea de tierra.

En esta virtud, como se ha hecho en los dibujos de la figura 22, quedarán representadas las proyecciones con sólo trazar dos rectas paralelas á la línea de tierra: si la recta se halla en el diedro 1º ó en el 3º estarán las proyecciones a distinto lado de la línea de tierra: la horizontal por debajo y la vertical por encima si se trata de aquél; pero inversamente si se trata de éste; mas, si está en el diedro 2º ó en el 4º se encontrarán las proyecciones al mismo lado de la línea de tierra: ambas por encima respecto de aquél, ó por debajo respecto de éste. Lo dicho se ve en los dibujos 1º y 3º en el primer caso, 2º y 4º en el segundo.

2º *Posiciones de los planos bisectores.* En este supuesto, por ser la recta paralela á la línea de tierra, se verifica lo demostrado en el caso precedente; pero como la recta se halla también en los planos bisectores, de conformidad con el Lema del nº 32, II, las proyecciones equidistarán de la línea de tierra. Por tanto, si se halla en el diedro 1º ó 3º estarán las proyecciones á distinto lado de dicha línea, pero á igual distancia de la misma: la horizontal por debajo y la vertical por encima, si se trata de aquél; pero inversamente si se trata de éste; y si se halla en el diedro 2º ó en el 4º, las proyecciones se confundirán en una sola por encima de la línea de tierra considerado aquél, ó por debajo respecto de éste. Lo dicho se ve en los dibujos 1º y 3º, 2º y 4º de la figura 23.

3º *Posiciones en los planos de proyección.* Si además de ser la recta paralela á la línea de tierra se encuentra en uno de los planos de proyección, por no distar nada del plano donde está, será ella misma su proyección de igual nombre en este plano; y como la distancia ó separación de una recta respecto de un plano á que es paralela, se mide por la distancia de su proyección de nom-



bre contrario á la línea de tierra, *tal proyección se hallará en está línea.* Según que la recta se encuentre en la región anterior del plano horizontal, ó en la superior del vertical, ó en la posterior de aquél, ó, en fin, en la inferior de éste, resultan los dibujos 1º, 2º, 3º y 4º respectivamente, de la figura 24.

4º *Posición en la línea de tierra.* Por cuanto la recta se halla en la intersección de los dos planos de proyección, estará en el horizontal y vertical á un tiempo: como se encuentra en el horizontal, la proyección vertical, por lo visto en el caso anterior, se hallará en la línea de tierra; y por encontrarse la recta en el plano vertical, la proyección horizontal se hallará en la misma línea. En ótros términos: *si la recta del espacio se encuentra en la línea de tierra, en la misma, confundidas en una ó coincidiendo, se hallarán sus proyecciones.* Esto se significa en la figura 25 con dos pequeños trazos por encima y debajo de la línea de tierra, y en los extremos de las proyecciones, suponiendo finita la recta.

C). *Perpendicular al plano horizontal.* En este supuesto, *la proyección del mismo nombre ó sobre este plano será un punto: el de intersección de la recta y el plano horizontal (nº 38, Excep. 1ª);* y como el plano proyectante respecto del vertical, á más de ser perpendicular á éste, lo es al horizontal de proyección, por serlo, según lo dicho, la recta por donde pasa, cortándose pues, el proyectante y el vertical, perpendicularmente al horizontal, la intersección será perpendicular al mismo; y por esto, á toda recta que, como lo línea de tierra, pase por el pie de aquélla, en este plano. En otros términos: *la proyección vertical de la recta es otra perpendicular á la línea de tierra.*

Como, por lo visto en el cuadro, la recta puede tener tres posiciones: el dibujo 1º de la figura 26 lo es para cuando está delante del plano vertical: la proyección horizontal *ab* se encuentra en la prolongación de la vertical *a'b'* por debajo de la línea de tierra; el dibujo 2º, para cuando está en el plano vertical: la proyección horizontal *ab* es el pie de la *a'b'* en dicha línea; finalmente, el dibujo 3º, para cuando está por detrás del plano verti-

cal:  $ab$ , por encima de la línea de tierra, coincide con un punto de la proyección vertical  $a'b'$ .

D). *Perpendicular al plano vertical.* Vale todo lo dicho en el caso precedente cambiando las palabras *horizontal*, *plano horizontal* con *vertical*, *plano vertical* y viceversa. De lo que se infiere: *en tal posición, la proyección vertical ó del mismo nombre será un punto, el de intersección de la recta y el plano vertical; y la proyección horizontal, una recta perpendicular á la línea de tierra.*

Como la recta del espacio puede tener tres posiciones, el dibujo 1º de la figura 27 corresponde á lo primero, á saber: cuando está encima del plano horizontal, en cuyo caso la proyección vertical  $a'b'$  se encuentra encima de la línea de tierra, y en la prolongación de la horizontal  $ab$ ; el dibujo 2º, cuando está la recta en el plano horizontal: la proyección vertical  $a'b'$  es el pie de la  $ab$  en la línea de tierra; finalmente, el dibujo 3º, cuando se halla la recta debajo del horizontal:  $a'b'$ , debajo de la línea de tierra, coincide con un punto de la proyección horizontal  $ab$ .

E). *Perpendicular á la línea de tierra.* Este caso se subdivide en los siguientes:

1º: *sin cortarla.* Razonamos entonces de la siguiente manera: si por un punto de la recta del espacio se traza una perpendicular á la línea de tierra; y por el punto de intersección, una paralela á aquélla, las líneas, perpendicular y paralela, determinan un plano perpendicular á la de tierra; luego este plano, en el que se halla totalmente la línea del espacio (nº 35, nota 2ª), será también perpendicular á los dos de proyección; y contiene así los dos proyectantes de la recta del espacio, respecto de cada uno de aquéllos. Luego: *los planos proyectantes de la recta, ya respecto del horizontal de proyección, ya del vertical, determinan ó son, mejor dicho, un solo plano perpendicular á la línea de tierra; y así que las intersecciones de este plano con los de proyección, ó las proyecciones horizontal y vertical de la recta del espacio, sean perpendiculares á la línea de tierra, cortándola en un mismo punto.*

El caso presente es una excepción de la regla dada

en el nº 44, sobre la determinación de las trazas de una recta; por lo cual, mientras no se expliquen los métodos para fijarlas (n.º 80 y 87), cuando, como ahora, son las proyecciones perpendiculares á la línea de tierra, supondremos que se conocen dos puntos de dicha recta, prefiriendo, como tales, las trazas  $h-h'$ ,  $v-v'$  (fig. 28); y como que la recta aludida, según lo indicado en el *cuadro de posiciones* (nº 45), puede tenerla cualquiera respecto de los planos bisectores de los diedros, ó ser perpendicular á éstos planos, resulta que

a): *si tiene una posición cualquiera*, las trazas mencionadas distarán desigualmente de la línea de tierra; y las cuatro posiciones que corresponden á la recta se manifiestan: en los dibujos 1º y 3º de la figura citada, si el segmento limitado por las trazas se encuentra en el diedro primero ó tercero: las proyecciones se hallan á distinto lado de la línea de tierra formando, como ya se ha dicho, una sola recta perpendicular á la misma línea: por debajo la horizontal y por encima la vertical en aquél; pero á la inversa en éste. Los dibujos 2º y 4º lo son si el aludido segmento se encuentra en el diedro segundo ó cuarto: las dos proyecciones se confunden en una recta situada á un solo lado de la línea de tierra: por encima si está en aquél; y por debajo si se halla en éste.

NOTA. Si se considera el segmento en el diedro segundo, la recta, desde  $v-v'$  [dib. 2º], es visible en el primero: de aquí las partes llenas que se ven en las respectivas proyecciones; lo mismo que desde  $h-h'$ , en el diedro cuarto [dib. 4º].

b): *si es perpendicular al plano bisector de un diedro cualquiera*. Entonces resultará también, que las trazas de la recta equidistan de la línea de tierra. Pues que el plano determinado por la recta, perpendicularmente á la línea de tierra, produce intersecciones en el bisector y los de proyección que, con los segmentos de la misma recta, á partir del bisector, forman dos triángulos rectángulos congruentes, porque tienen respectivamente iguales un cateto y un ángulo adyacente agudo: de aquí que sean iguales las hipotenusas ó proyecciones de la recta; y, por lo mismo, que *equidisten las trazas*.

Como en todo lo demás se verifica lo dicho en el caso *a* precedente, resulta en descriptiva, que los dibujos 1º y 3º de la figura 29 se refieren á la recta, si el segmento limitado por las trazas se encuentra en el diedro primero: *tales trazas ó  $h-h'$ ,  $v-v'$ , formando las proyecciones una sola recta á uno y otro lado de la línea de tierra, equidistan de ella: por debajo la horizontal y por encima la vertical en aquél; pero á la inversa en éste.* Los dibujos 2º y 4º, si el segmento aludido se encuentra en el diedro segundo ó cuarto: *las trazas  $h-h'$ ,  $v-v'$ , confundiendo las proyecciones en una recta al mismo lado de la línea de tierra, coinciden en un punto: por encima si está en aquél; y por debajo si se halla en éste.*

2º: *cortándola.* Razonamos entonces de la siguiente manera: si por el punto donde la recta corta perpendicularmente la línea de tierra, se dirige otra perpendicular también á esta línea, las dos perpendiculares definen un plano perpendicular á la misma; luego este plano, en el que se halla totalmente la primera recta, será por eso perpendicular á los dos de proyección; y contiene así los dos proyectantes de dicha recta, relativamente á cada uno de aquéllos. Luego, *los planos proyectantes de la recta, ya con relación al horizontal de proyección, ya relativamente al vertical, determinan ó son, mejor dicho, un solo plano perpendicular á la línea de tierra; y así, que las intersecciones de este plano con los de proyección ó las proyecciones horizontal y vertical de la recta del espacio, sean perpendiculares á la línea de tierra, cortándola en un mismo punto.*

En el caso presente, al contrario de todos los estudiados hasta aquí, quedan de hecho determinadas las trazas de la recta; pues que están confundidas las dos en el punto donde la recta corta la línea de tierra, punto por el que pasan las proyecciones de la recta considerada. Si á más de este punto, se determina otro *a-a'* de la recta; como puede estar situada, según lo indicado en el cuadro (nº 45), fuera de los planos bisectores de los diedros ó en estos planos, resulta que

(Continuará).