
TEORÍA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD
CENTRAL DEL ECUADOR



DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES
CON RELACIÓN Á ÉL

(4)

Continuación de la página 210, número 122

V.—*El límite de una raíz con cantidad radical é índice variables, es igual á otra raíz que tiene por cantidad radical é índice respectivamente, los límites de los primeros.*

Debe ser

$$\lim. \left[\frac{f_1(x)}{\sqrt{f(x)}} \right] = \frac{\lim. f_1[x]}{\sqrt{\lim. f[x]}}$$

Demosⁿ.—Por el teorema precedente será

$$f_1[x] = (f[x])^{\frac{1}{\sqrt{f[x]}}};$$

luego

$$\begin{aligned} \lim. \left[\frac{f_1[x]}{\sqrt{f[x]}} \right] &= \lim. f(x)^{\frac{1}{\lim. f_1[x]}} \\ &= \frac{\lim. f_1(x)}{\sqrt{\lim. f(x)}} \end{aligned}$$

L. Q. D. D.

Nota.—Los teoremas 1^o y 2^o valen solamente cuando las funciones que se suman ó multiplican son en número finito; si este número fuera infinito, no valdrían. En efecto, una cantidad constante a puede dividirse en un número ω de partes, cada una de las cuales tiene por valor $\frac{a}{\omega}$; con lo cual el número de partes puede ser infinitamente grande, y cada una de ellas infinitamente pequeñas; luego, por grande que sea el número de partes y por pequeñas que sean éstas, se verificará

$$\lim. \sum \frac{a}{\omega} = a; \quad (k)$$

pero si $\lim. \sum \frac{a}{\omega}$ fuera igual á la suma de los límites de cada una de las partes, siendo

$$\lim. \frac{a}{\omega} = 0,$$

resultaría

$$\lim. \Sigma \frac{1}{\omega} = 0, \text{ ó } 0 \times \infty;$$

y nada se sabría acerca del valor de la expresión [k].

Lo mismo vale para la expresión

$$\left[1 + \frac{1}{\omega}\right]^\omega,$$

donde el factor $\left[1 + \frac{1}{\omega}\right]$ debe multiplicarse infinitas veces consigo mismo. Si pues, el límite de $\left[1 + \frac{1}{\omega}\right]^\omega$, fuese igual al producto de los límites de los factores, la expresión tendría por valor e ó 1^∞ , supuesto que

$$\lim. \frac{1}{\omega} = 0;$$

y así no se sabría que

$$\lim. \left[1 + \frac{1}{\omega}\right]^\omega = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045 \dots,$$

como se probará á poco.

V

LIMITES FUNDAMENTALES DE ALGUNAS FUNCIONES

41. Función entre funciones.—Estos límites se fundan en el siguiente

Lema.—*Si una cantidad variable se encuentra constantemente entre otras dos que tienden á un mismo límite,*

también aquélla se acercará á este límite.

Si pues,

$$f[x] > f_1[x] > f_2(x); \quad (a)$$

y se verifica

$$\lim. f[x] = \lim. f_2[x] = A;$$

deberá ser

$$\lim. f_1(x) = A.$$

Nota.—Por la condición expuesta, estando $f_1(x)$ entre $f[x]$ y $f_2[x]$, será mayor que la úna y menor que la ótra en magnitudes variables decrecientes y de signo contrario, que desaparecerán con el grado de la aproximación: si tales magnitudes variables decrecientes, ó diferencias, son, por ejemplo, α y β , podemos escribir

$$f_1(x) = f[x] - \alpha = f_2[x] + \beta, \quad [b]$$

que es una condición idéntica á la [a]; porque se tiene, evidentemente,

$$f[x] > f_1[x], \quad f_1(x) > f_2[x];$$

esto es,

$$f[x] > f_1[x] > f_2(x).$$

Demos.^{ta}.—1.^a Se sigue inmediatamente de lo expuesto en la nota que precede, que acercándose $f(x)$, $f_2[x]$ al $\lim. A$, decrecen hasta desaparecer todos los valores en que difieren de A tales funciones, hallándose antes del límite [n.^o 35, *lema*]; luego, en el límite se verificará

$$\lim. \alpha = \lim. \beta = 0;$$

y así, por [b],

$$\lim.f_1(x)=\lim.f(x)=\lim.f_2(x)=A.$$

L. Q. D. D.

2ª Según la idea del límite, $f(x)$ y $f_2(x)$ más y más se acercan al valor A ; luego más y más se aproximan entre sí; por tanto, hallándose $f_1(x)$ constantemente entre las dos, éstas más y más se aproximan á $f_1(x)$; ó, lo que es lo mismo, $f_1(x)$ más y más se acerca al valor común de ellas, que es A . Luego

$$\lim.f_1(x)=A.$$

42. La base de los logaritmos naturales.—La serie

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \dots \quad (c)$$

es de grande uso en la análisis, y su límite se designa por el número

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045 \dots$$

base del sistema de logaritmos neperianos ó naturales; pero este número es también el límite de una expresión muy importante que ahora nos proponemos estudiar valiéndonos del siguiente

Teor.—El límite de la potencia de una fracción, cuyo denominador es susceptible de aumento indefinido, y el numerador siempre mayor en una unidad, teniendo la fracción por exponente un valor igual al denominador, es la base del sistema neperiano.

Decimos que debe ser

$$\lim_{\omega} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = \lim_{\omega} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \dots n}$$

Demosⁿ.—Distinguiremos varios casos, según sea ω un número *positivo* ó *negativo*, *entero* o *fraccionario*.

CASO 1^o.—Sea ω *positivo* y *entero*, y pongamos $\omega = m$: tendremos

$$\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

expresión que recibe la forma indeterminada 1^{∞} cuando $m = \infty$ (n^o 38, 6^o). Si desarrollamos $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ aplicando el binomio de Newton, tendremos

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1} \left(\frac{1}{m}\right) + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times n} \left(\frac{1}{m}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{m}\right)}{1 \times 2} + \frac{1 \left[1 - \frac{1}{m}\right] \left[1 - \frac{2}{m}\right]}{1 \times 2 \times 3} + \dots$$

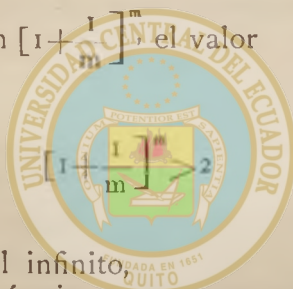
$$+ \frac{1 \left[1 - \frac{1}{m}\right] \left[1 - \frac{2}{m}\right] \dots \left[1 - \frac{n-1}{m}\right]}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times n}; \quad (d)$$

como los denominadores de estos quebrados son cantidades constantes, los valores de ellos dependen de los numeradores, que se forman de varias diferencias, cuyos

sustraendos disminuyen á medida que m aumenta; luego cada término que ocupe un lugar invariable, crecerá con el indefinido aumento de m ; y como el número total de términos crece también, la expresión [d], cuya forma es

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{m}\right]^m &= 2 + \frac{1\left[1 - \frac{1}{m}\right]}{1 \times 2} + \frac{1\left[1 - \frac{1}{m}\right]\left[1 - \frac{2}{m}\right]}{1 \times 2 \times 3} + \dots \\ &+ \frac{1\left[1 - \frac{1}{m}\right]\left[1 - \frac{2}{m}\right]\dots\left[1 - \frac{n-1}{m}\right]}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times n}, \end{aligned} \quad [e]$$

da, para la fracción $\left[1 + \frac{1}{m}\right]^m$ el valor



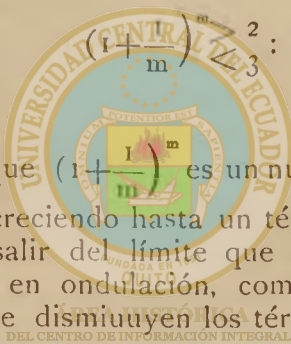
aunque m tienda al infinito.

Si término á término comparamos el segundo miembro de [e] con la serie [c] resultará, prescindiendo de los dos primeros, cuya suma es 2,

$$\begin{aligned} \frac{1\left[1 - \frac{1}{m}\right]}{1 \times 2} + \frac{1\left[1 - \frac{2}{m}\right]}{1 \times 2 \times 3} + \dots + \frac{1\left[1 - \frac{1}{m}\right]\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times n} \\ < \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \dots + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \dots n}; \end{aligned} \quad [f]$$

porque teniendo los términos de (e) denominadores iguales á los de (c), los numeradores de éstos son respectivamente mayores que los de (e); mas el numerador del

término general de [e] se aproxima indefinidamente á 1 cuando m tiende al infinito; luego en esta suposición, el indicado término general de [e] se aproxima indefinidamente al de [c], y así la diferencia entre los dos puede ser menor que toda cantidad asignable. El raciocinio expuesto vale, por lo mismo, para cada uno de los términos de [e] cuando se los compara con los de [c]; luego todo el primer miembro de la desigualdad [f] se acerca indefinidamente al segundo de la misma; y puede así la diferencia llegar á ser menor que toda cantidad determinada, muy pequeña. Pero el segundo miembro de esta desigualdad es menor que 1; luego lo será el primero, que, con el valor 2, da el de la expresión $(1 + \frac{1}{m})^m$: se tiene pues,



quiere decir que $(1 + \frac{1}{m})^m$ es un número cuyo valor está entre 2 y 3, creciendo hasta un término ó número de terminado, sin salir del límite que señalan 2 y 3, y sin recibir valores en ondulación, como se ve por la continuidad con que disminuyen los términos de [c] ó [e].

Se deduce pues, que en el límite $(1 + \frac{1}{m})^m$ difiere del valor de [c] en una cantidad menor que toda ótra determinada por pequeña que sea; ó, lo que es lo mismo, se verifica

$$\lim.(1 + \frac{1}{m})^m = \lim.(1 + \frac{1}{\omega})^\omega = e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\dots$$

Q. D. L. 1º

(Continuará)