TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

(1)

Continuación de la página 210, número 122

V.—*El límite de una raíz con cantidad radical é índice variables*, es igual á otra raíz que tiene por cantidad radical é índice respectivamente, los límites de los primeros.

Debe ser

$$\text{lím.}\left[\sqrt[f_1(x)]{f(x)}\right] = \sqrt[\text{lím.}f_1[x]]{\text{lím.}f[x]}$$

Demosn.—Por el teorema precedente será

$$\sqrt[f_1[x]]{f(x)}=(f[x])^{\frac{1}{f_1[x]}};$$

luego

$$\text{lím.}\left[\sqrt[f_1[x]]{f[x]}\right]=\text{lím.}\,f(x)^{\frac{1}{\text{lím.}\,f_1[x]}}$$

$$=\sqrt[\text{lím.}\,f_1(x)]{\text{lím.}\,f(x)}$$

L. Q. D. D.

Nota.—Los teoremas 1º y 2º valen solamente cuando las funciones que se suman ó multiplican son en número finito; si este número fuera infinito, no valdrían. En efecto, una cantidad constante a puede dividirse en un número ω de partes, cada una de las cuales tiene por valor $\frac{a}{\omega}$; con lo cual el número de partes puede ser infinitamente grande, y cada una de ellas infinitamente pequeñas; luego, por grande que sea el número de partes y por pequeñas que sean éstas, se verificará

$$\text{lím.}\,\Sigma\frac{a}{\omega}=a; \qquad (k)$$

pero si $\text{lím.}\,\Sigma\frac{a}{\omega}$ fuera igual á la suma de los límites de cada una de las partes, siendo

$$\text{lím.}\,\frac{a}{\omega}=0,$$

resultaría

$$\text{lím.}\Sigma\frac{a}{\omega}=0,\quad \text{ó}\quad 0\times\infty\,;$$

y nada se sabría acerca del valor de la expresión [k].

Lo mismo vale para la expresión

$$\left[1+\frac{1}{\omega}\right]^{\omega},$$

donde el factor $\left[1+\frac{1}{\omega}\right]$ debe multiplicarse infinitas veces consigo mismo. Si pues, el límite de $\left[1+\frac{1}{\omega}\right]^{\omega}$, fuese igual al producto de los límites de los factores, la expresión tendría por valor 1 ó 1^{∞}, supuesto que

$$\text{lím.}\frac{1}{\omega}=0;$$

y así no se sabría que

$$\text{lím.}\left[1+\frac{1}{\omega}\right]^{\omega}=2{\cdot}718\;281\;828\;459\;045\ldots,$$

como se probará á poco.

V

LIMITES FUNDAMENTALES DE ALGUNAS FUNCIONES

41. Función entre funciones.—Estos límites se fundan en el siguiente

Lema.—*Si una cantidad variable se encuentra constantemente entre otras dos que tienden á un mismo límite,* *también aquélla se acercará á este límite.*

Si pues,

$$f[x]>f_1[x]>f_2(x); \qquad \text{(a)}$$

y se verifica

$$\text{lím.}f[x]=\text{lím.}f_2[x]=A;$$

deberá ser

$$\text{lím.}f_1(x)=A.$$

Nota.—Por la condición expuesta, estando $f_1(x)$ entre $f[x]$ y $f_2[x]$, será mayor que la úna y menor que la ótra en magnitudes variables descrecientes y de signo contrario, que desaparecerán con el grado de la aproximación: si tales magnitudes variables decrecientes, ó diferencias, son, por ejemplo, α y β, podemos escribir

$$f_1(x]=f[x]-\alpha=f_2[x]+\beta, \qquad [b]$$

que es una condición idéntica á la [a]; porque se tiene, evidentemente,

$$f[x]>f_1[x],\ f_1(x)>f_2[x];$$

esto es,

$$f[x]>f_1[x]>f_2(x).$$

Demos^n^.—1ª Se sigue inmediatamente de lo expuesto en la nota que precede, que acercándose f(x), $f_2[x)$ al *lím. A*, decrecen hasta desaparecer todos los valores en que difieren de A tales funciones, hallándose antes del límite [nº 35, *lema*]; luego, en el límite se verificará

$$\text{lím.}\alpha=\text{lím.}\beta=0;$$

y así, por [b],

$$\text{lím.}f_1(x)=\text{lím.}f(x)=\text{lím.}f_2(x)=A.$$

L. Q. D. D.

2ª Según la idea del límite, $f(x)$ y $f_2(x)$ más y más se acercan al valor A; luego más y más se aproximan entre sí; por tanto, hallándose $f_1(x)$ constantemente entre las dos, éstas más y más se aproximan á $f_1(x)$; ó, lo que es lo mismo, $f_1(x)$ más y más se acerca al valor común de ellas, que es A. Luego

$$\text{lím.}f_1(x)=A.$$

42. La base de los logaritmos naturales.—La serie

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\ldots+\frac{1}{1\times2\times3\ldots n}+\ldots \qquad (c)$$

es de grande uso en la análisis, y su límite se designa por el número

$$e=2{\cdot}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ldots$$

base del sistema de logaritmos neperianos ó naturales; pero este número es también el límite de una expresión muy importante que ahora nos proponemos estudiar valiéndonos del siguiente

Teor.—*El límite de la potencia de una fracción, cuyo denominador es susceptible de aumento indefinido, y el numerador siempre mayor en una unidad, teniendo la fracción por exponente un valor igual al denominador*, es la base del sistema neperiano.

Decimos que debe ser

$$\text{lím.}\left(\frac{1+\omega}{\omega}\right)^{\omega}=\text{lím.}\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=e=2{\cdot}718\ 281\ 828\ 459\ 045$$

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\ldots\ldots+\frac{1}{1\times 2\times 3\ldots n}.$$

Demosⁿ.—Distinguiremos varios casos, según sea ω un número *positivo* ó *negativo*, *entero o fraccionario*.

Caso 1º—Sea ω *positivo* y *entero*, y pongamos $\omega=m$: tendremos

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m},$$

expresión que recibe la forma indeterminada 1^{∞} cuando $m=\infty$ (nº 38, 6º). Si desarrollamos $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ aplicando el binomio de Newton, tendremos

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=1+\frac{m}{1}\left(\frac{1}{m}\right)+\frac{m(m-1)}{1\times 2}\left(\frac{1}{m}\right)^{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}$$

$$\left(\frac{1}{m}\right)^{3}+\ldots\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots[m-(n-1)]}{1\times 2\times 3\times 4\ldots\ldots\times n}\left(\frac{1}{m}\right)^{n}$$

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1\times 2}+\frac{1\left[1-\frac{1}{m}\right]\left[1-\frac{2}{m}\right]}{1\times 2\times 3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1\left[1-\frac{1}{m}\right]\left[1-\frac{2}{m}\right]\ldots\ldots\left[1-\frac{n-1}{m}\right]}{1\times 2\times 3\times 4\ldots\ldots\times n}, \qquad \text{(d)}$$

como los denominadores de estos quebrados son cantidades constantes, los valores de ellos dependen de los numeradores, que se forman de varias diferencias, cuyos sustraendos disminuyen á medida que m aumenta; luego cada término que ocupe un lugar invariable, crecerá con el indefinido aumento de m; y como el número total de términos crece también, la expresión [d], cuya forma es

$$\left[1+\frac{1}{m}\right]^m = 2 + \frac{1\left[1-\frac{1}{m}\right]}{1\times 2} + \frac{1\left[1-\frac{1}{m}\right]\left[1-\frac{2}{m}\right]}{1\times 2\times 3} + \ldots$$

$$+ \frac{1\left[1-\frac{1}{m}\right]\left[1-\frac{2}{m}\right]\ldots\left[1-\frac{n-1}{m}\right]}{1\times 2\times 3\times 4\ldots\times n}, \qquad [e]$$

da, para la fracción $\left[1+\frac{1}{m}\right]^m$, el valor

$$\left[1+\frac{1}{m}\right]^m > 2$$

aunque m tienda al infinito,

Si término á término comparamos el segundo miembro de [e] con la serie [c], resultará, prescindiendo de los dos primeros, cuya suma es 2,

$$\frac{1\left[1-\frac{1}{m}\right]}{1\times 2} + \frac{1\left[1-\frac{2}{m}\right]}{1\times 2\times 3} + \ldots + \frac{1\left[1-\frac{1}{m}\right]\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\times 2\times 3\times 4\ldots\times n}$$

$$< \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \ldots + \frac{1}{1\times 2\times 3\ldots n}; \qquad [f]$$

porque teniendo los términos de (e) denominadores iguales á los de (c), los numeradores de éstos son respectivamente mayores que los de (e); mas el numerador del término general de [e] se aproxima indefinidamente á 1 cuando m tiende al infinito; luego en esta suposición, el indicado término general de [e] se aproxima indefinidamente al de [c], y así la diferencia entre los dos puede ser menor que toda cantidad asignable. El raciocinio expuesto vale, por lo mismo, para cada uno de los términos de [e] cuando se los compara con los de [c]; luego todo el primer miembro de la desigualdad [f] se acerca indefinidamente al segundo de la misma; y puede así la diferencia llegar á ser menor que toda cantidad determinada, muy pequeña. Pero el segundo miembro de esta desigualdad es menor que 1; luego lo será el primero, que, con el valor 2, da el de la expresión $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$: se tiene pues,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \begin{matrix}> 2\\ < 3\end{matrix}:$$

quiere decir que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ es un número cuyo valor está entre 2 y 3, creciendo hasta un término ó número determinado, sin salir del límite que señalan 2 y 3, y sin recibir valores en ondulación, como se ve por la continuidad con que dismiuuyen los términos de [c] ó [e]. Se deduce pues, que en el límite $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ difiere del valor de [c] en una cantidad menor que toda ótra determinada por pequeña que sea; ó, lo que es lo mismo, se verifica

$$\text{lím.}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\text{lím.}\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega=e=2{\cdot}718\ 281\ 828\ 459\ 045....$$

Q. D. L. 1º

(Continuará)