TEORIA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

Y DE LOS MUROS DE CONTENSION Y REVESTIMIENTO.

POR

JOSE KOLBERG, S. J. — Profesor en la Universidad

(Continuación. – V. el nº 70, pág. 366)

§ 13

Resultados de experiencia sobre la cohesión

Por experimentos y cálculos semejantes á los que hemos visto en el § anterior, se han hallado suficientemente comprobadas, las leyes de cohesión, que ponemos á continuación:

1º Las *tierras comunes vegetales* tienen casi idéntica cohesión ya se hallen en estado seco, ya en el de una pequeña humedad. En ambos casos, si las tierras son movedizas, la cohesión no es cantidad notable, de 39 — 40 kilogramos por metro cuadrado; pero puede aumentarse considerablemente apelmazando las tierras por capas consecutivas, hasta llegar á 560 y más kilogramos por metro cuadrado. Tierras vegetales completamente saturadas de agua no tienen ninguna cohesión apreciable.

2º Las *arenas* tienen, asímismo, casi idéntica cohesión en el estado seco y poco húmedo, pero esta cohesión es poco menor que en las tierras vegetales, cerca de 28 kilogramos por metro cuadrado. Aun apelmazando no se aumenta de una manera sensible, ni la densidad, ni la cohesión de las arenas. Pero la cohesión va en aumento mezclándolas con agua, creciendo así hasta el doble valor, esto es, hasta cerca de 60 kilogramos.

3º Las *arcillas* están dotadas de una cohesión, que aun en el estado movedizo sobrepuja á la de las tierras vegetales y arenas, en cuyo caso, aunque sean secas ó poco húmedas, su cohesión es de 45 — 78 kilogramos por metro cuadrado. Además, parece que la cohesión se hace mayor mojándolas con agua; pues saturadas de este líquido se ha hallado ser su cohesión igual á 225 kilogramos. Pero mucho más crece todavía esta cohesión apelmazándolas, mayormente cuando, al mismo tiempo, se les moja con agua; experimentos convenientes han demostrado que, bajo dichas circunstancias, la cohesión va aumentando hasta 930 kilogramos por metro cuadrado.

4º Los *ripios*, *piedras toscas* y otros cuerpos semejantes no tienen cohesión alguna, si bien la pueden tener cuando se mezclan con tierras vegetales ó arcillas.

§ 14

Dos problemas prácticos.

Problema I. Conocido el ángulo (α) del talud natural y la altura (h_1) de cohesión que corresponde á un corte vertical del terreno, se busca la máxima profundidad, hasta la cual puede ahondarse un foso con tal que tenga una escarpa ó talud $=\operatorname{tang}\varepsilon$ y que sus paredes no necesiten un revestimiento:

Resolución. Se aplican las ecuaciones (17) y (18)

$$h_1 = \frac{2c}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha} \qquad h = \frac{2c}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}$$

de donde sale

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha \cos\varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)} = u \tag{26}$$

$$h = h_1 . u \tag{27}$$

Ejemplo. Sea $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{1}{2}$, $h_1 = 0{,}948$ metros, $\operatorname{tang}\alpha = 1{,}2$; resultará

$$\begin{array}{r|r}
\alpha = 50^\circ\ 12' & \log u = 2 \times 9{,}62757 = 19{,}25514 - 20 \\
\frac{1}{2}\alpha = 25^\circ\ \ 6' & +\ \ 9{,}95154 - 10 \\
\varepsilon = 26^\circ\ 34' & \overline{\phantom{29{,}20668 - 30}} \\
\frac{1}{2}\varepsilon = 13^\circ\ 17' & 29{,}20668 - 30 \\
\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon) = 11^\circ\ 49' & -2 \times 9{,}31129 = -18{,}62258 + 20 \\
 & \overline{\log u = 10{,}58410 - 10} \\
 & + \log h_1 = \ \ 0{,}97681 - \ \ 1 \\
 & \overline{\log h = 11{,}56091 - 11} \\
 & h = \ \ 3{,}638 \text{ metros.}
\end{array}$$

Problema II. Un foso debe tener una profundidad de h metros; ¿cuál habrá de ser su escarpe ó tang ε, para que no haya necesidad de vestirlo con muros?

Resolución. La ecuación (26) se tiene que resolver según ε, á cuyo fin puede procederse de esta manera (fig. 22). Se supone conocido el cociente

$$\frac{\cos \varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)} = \frac{h}{h_1 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha} = a \qquad (a)$$

Mediante la fórmula $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} z = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$ se sigue que

$$\frac{2 \cos \varepsilon}{1 - \cos(\alpha - \varepsilon)} = a \quad \text{ó bien } 2 \cos \varepsilon + a \cos(\alpha - \varepsilon) = a$$

y resolviendo $\cos(\alpha - \varepsilon)$, se tiene

$$(2 + a \cos \alpha) \cos \varepsilon + a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varepsilon = a \qquad (b)$$

Introduciendo un ángulo auxiliar λ, hágase

$$\left.\begin{aligned} 2 + a \cos \alpha &= n \operatorname{sen} \lambda \\ a \operatorname{sen} \alpha &= n \cos \lambda \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

por lo cual, la ecuación (b) se convertirá en

$$n(\operatorname{sen} \lambda \cos \varepsilon + \cos \lambda \operatorname{sen} \varepsilon) = a$$
$$n \operatorname{sen}(\lambda + \varepsilon) = a$$
$$\operatorname{sen}(\lambda + \varepsilon) = \frac{a}{n} \qquad (d)$$

Pero de la segunda relación (c) se sigue, que

$$\frac{a}{n} = \frac{\cos \lambda}{\operatorname{sen} \alpha}$$

luego resulta

$$\operatorname{sen}(\lambda + \varepsilon) = \frac{\cos \lambda}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad (\ )$$

El valor de λ se calculará por las dos ecuaciones (c); para esto, divídase la primera por la segunda, y se tendrá

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{2 + a \cos \alpha}{a \operatorname{sen} \alpha} = \frac{2}{a \operatorname{sen} \alpha} + \operatorname{cotg} \alpha$$

Pero como $a=\frac{h}{h, \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha}$, será

$$a \operatorname{sen} \alpha=\frac{h \quad \operatorname{sen} \alpha}{h, \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha}=\frac{2h \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha}{h, \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha}=\frac{2h}{h,} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$$

$$\frac{2}{a \operatorname{sen} \alpha}= \quad \frac{h,}{h} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha$$

Luego la resolución del problema tiene lugar por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \lambda &= \frac{h,}{h} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{sen}(\lambda+\varepsilon) &= \frac{\cos \lambda}{\operatorname{sen} \alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Por la primera se determinará el valor del ángulo auxiliar λ, que conocido dirige ba hallar ε mediante la segunda.

Ejemplo ¿Cuál será el talud más empinado para un foso de $h=3{,}6$ metros de profundidad, si se conoce la altura $h,=0{,}948$ de cohesión para un corte vertical, y además si el talud natural de las tierras es tang $\alpha=1{,}2$?

$$\alpha=50^\circ 12' \quad \log \frac{h'}{h} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = 0{,}97681-1$$

$$\frac{1}{2}\alpha=25^\circ 6' \qquad +0{,}67065-1$$

$$1{,}64746-2$$
$$-0{,}55630$$
$$=0{,}09116-1$$

$$\text{Núm.}=0{,}1236$$
$$\operatorname{cotg} \alpha=0{,}8332$$
$$\operatorname{tang} \lambda=0{,}9568$$
$$\lambda=43^\circ 44'$$

$$\left.\begin{aligned} \log \operatorname{sen}(\lambda+\varepsilon) &= 9{,}85888-10 \\ &-9{,}88552+10 \\ &=9{,}97336-10 \end{aligned}\right\} \lambda+\varepsilon=70^\circ 8'$$

$$\varepsilon=70^\circ 8'-43^\circ 40'=26^\circ 28'$$
$$\operatorname{tang} \varepsilon=0{,}498=\tfrac{1}{2}$$

Para evitar tan largos cálculos, el ingeniero *Français* ha construído la tabla III que sigue á continuación:

TABLA III.

Valores de tang ε	Valores de tang α							
	0,90	**1,00**	**1,10**	**1,20**	**1,30**	**1,40**	**1,50**	**1,60**
0,20	1,80	1,71	1,64	1,59	1,55	1,52	1,49	1,47
0,25	2,14	1,99	1,89	1,82	1,75	1,70	1,66	1,63
0,30	2,57	2,35	2,19	2,08	1,99	1,91	1,86	1,81
0,35	3,13	2,79	2,56	2,39	2,27	2,17	2,08	2,02
0,40	3,88	3,36	3,02	2,78	2,60	2,46	2,35	2.26
0,45	4,91	4,11	3,60	3,24	3,00	2,81	2,66	2,54
0,50	6,38	5,11	4,34	3,84	3,48	3,23	3,02	2,87
0.55	8,59	6,47	5,31	4,58	4,08	3,72	3,45	3,24
0,60	11,93	8,41	6,63	5,53	4,83	4,33	3,97	3.69
0,65	18,05	11,28	8,40	6,77	5,76	5,08	4,58	4,22
0,70	28,26	15,77	10,90	8,42	6,96	6.00	5,33	4,84
0,75	51,54	23,26	14,63	10,69	8,52	7,16	6,25	5.60
0,80	119,08	37,41	20,47	13,92	10,61	8,65	7,39	6,51
0,85	188,06	68,21	30,26	18,67	13,46	10,50	8,82	7,63
0,90	∞	157,39	48,55	26,65	17,51	13,18	10,65	9,01
0,95	,,	645,69	86,59	38,61	23,50	16,73	13,03	10,79
1,00	,,	∞	204,69	61,95	32,86	21,77	16,21	12,98
1,05	,,	,,	840,78	113,03	48,60	29,21	20,57	15,88
1,10	,,	,,	∞	260,64	79,01	40,81	26,73	19,74
1,15	,,	,,	,,	1072,65	142,23	60,35	35,73	25,04
1,20	,,		,,	∞	328,14	96,93	50,09	32,53

La primera línea horizontal contiene los valores de tang α, la primera vertical contiene los de tang ε; los otros números presentan los valores correspondientes de $\frac{h}{h_{,}}$. En el caso de no ser contenido un número dado en esta tabla, se hará uso de la interpolación por diferencias.

Así, respecto del primer ejemplo, en donde tang $\varepsilon=\frac{1}{2}=0,5$ y tang$\alpha=1,2$ son cantidades dadas, en el lugar correspondiente de la tabla se halla $\frac{h}{h_{,}}=3,84$, luego será $h=3,84.h_{,}$ y como $h_{,}=0,948$ metros, resultará

$$h=3,84.\ 0,948=3,64 \text{ metros.}$$

En el segundo ejemplo, tenemos dados $h=3,6$ y $h_{,}=0,948$, luego $\frac{h}{h_{,}}=3,77$, y además tenemos tang $\alpha=1,2$. En la columna vertical de tang $\alpha=1,20$, no se halla con exactitud 3,77, pero muy aproximado es el número 3,84 que corresponde á tang $\varepsilon=0,5=\frac{1}{2}$. Si tang ε debe determinarse con mayor exactitud, se tiene para tang $\alpha=1,20$ y

tang $\varepsilon=0,45$,	el número menor $=3,24$
tang $\varepsilon=0,50$,	el número mayor $=3,84$
difer. $=0,05$	difer. $=0,60$

luego deberá ser

$$0,5:0,60=x:(3,84-3,77)$$

en donde x es la diferencia que se restará de tang $\varepsilon=0,50$, hallándose

$$x=\frac{5}{60}\cdot 0,07=0,00583$$

resulta el valor exacto

$$\text{tang } \varepsilon=0,50-0,00583=0,494$$

que es, con grande aproximación, el valor encontrado en el segundo ejemplo propuesto.

Los resultados que hemos calculado en uno y otro problema, valen para el estado del equilibrio labil; dando al foso aquella altura ó escarpe, la estabilidad de sus paredes se destruirá por cualquiera fuerza exterior, por pequeña que sea, como sería el influjo de la humedad y lluvia, ó por una sobrecarga en sus bordes. Luego para obtener una estabilidad más segura, se tomará en el primer problema una altura menor que la hallada, por ejemplo, solamente $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ de ella. De la misma manera se debe corregir el valor de tang ε en el segundo ejemplo. A este fin es mas sencillo no tomar toda la altura dada $h_{,}$ de cohesión, sino solamente $\frac{1}{2}h_{,}$, $\frac{2}{3}h_{,}$, $\frac{3}{4}h_{,}$. . . .con lo cual se supone el terreno menos coherente y se obtienen resultados más seguros.

Los números $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. . . .se llaman *coeficientes de seguridad* y se toman según las circunstancias.

§. 15.

Altura de cohesión para tierras que tienen una sobrecarga.

Cuando un terreno (fig. 23) se halla con sobrecarga, además del peso del prisma AFK del máximo empuje, se habrá de introducir este peso P de la sobrecarga, en cuanto aumenta la presión ejercida por el primero. Suponiendo dispuesta la sobrecarga con igualdad de presión p en cada metro cuadrado, tendremos $P=p.FK$, luego la presión vertical del prisma del mayor empuje, contando también la que se produce por la sobrecarga, será

$$\begin{aligned} X &= g.\triangle AFK+P \\ &= \tfrac{1}{2}\, g.AB.FK+p.FK \\ &= \tfrac{1}{2}\, g\left(1+\frac{2p}{g.AB}\right) AB.FK \\ &= \tfrac{1}{2}\, g\left(1+\frac{2p}{g.h'}\right) h'.FK \\ &= \tfrac{1}{2}\, g'h'.FK \end{aligned} \qquad (a)$$

en donde h' es la altura de cohesión en este caso, y para abreviar se pone

$$g'=g\left(1+\frac{2p}{g.h'}\right) \qquad (29)$$

La ecuación (a) demuestra que la suma X de las presiones verticales equivale al peso del prisma del mayor empuje AFK, cuando en vez de su peso específico g se sustituye otro mayor g', cuyo valor está espresado en la última relación (29).

Con esto, no se mudará en nada el desarrollo que hemos dado en el § 10, cuando le aplicamos á este caso, sustituyendo g' en vez de g en la ecuación (17), así que la altura de cohesión bajo estas condiciones se halla igual á

$$h'=\frac{2c}{g_{,}}.\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)} \qquad (30)$$

Además, el ángulo γ de la rotura, como es independiente de g y g′ tiene el mismo valor que en la ecuación (15), esto es

$$\gamma=\frac{\alpha-\varepsilon}{2} \tag{31}$$

Póngase en (30) para g′ su valor; resultará

$$h'=\frac{2c}{g\left(1+\frac{2p}{gh'}\right)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}$$

ecuación que resuelta según h′, conduce á

$$h'=\frac{2c}{g}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}-\frac{2p}{g} \tag{32}$$

El primer término es la altura de cohesión en el caso de no haber sobrecarga, resultando así

$$h'=h-\frac{2p}{g} \tag{33}$$

esto es: *que la altura de cohesión (h′) de tierras sobrecargadas es igual á la (h) que corresponde á tierras que no tienen sobrecarga, menos la cantidad* $\frac{2p}{g}$. *Es una propiedad notable, el que esta disminución de altura no depende de* α *ni de* ε.

Así, por ejemplo (fig. 24), si $h=6$ metros, $g=40^k$ y $p=80^k$, será

$$h'=6-\frac{2\,.\,80}{40}=6-4=2 \text{ metros.}$$

Luego sin revestimiento, el terreno podría sostenerse solamente hasta una altura de 2.^{m}

Continuará.