TEORIA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

Y DE LOS MUROS DE CONTENSION Y REVESTIMIENTO.

POR

JOSE KOLBERG, S. J. — Profesor en la Universidad

(Continuación. – V. el nº 73, pág. 148)

ARTÍCULO III

EMPUJE DE LAS TIERRAS, CUANDO SU SUPERFICIE ES HORIZOTAL.

§ 16.

Fórmula general en este caso.

La presion normal del empuje contra el muro de revestimiento se halla en cualquier caso por la ecuación (14) del § 8

$$\text{empuje actual} = \max\ D = \max \frac{\cos\rho\,(X \operatorname{sen}\varepsilon - cS \operatorname{sen}\alpha)}{\cos(\varepsilon + \gamma - \rho)}$$

En este artículo y los inmediatos omitiremos el efecto que produce el roce sobre la pared: las razones son las siguientes:

1) No puede contarse muchísimas veces con este roce, mayormente cuando la lluvia ú otras aguas pueden pasar entre el muro de contensión y las tierras cuyo empuje debe sostenerse.

2) Otras veces no será posible apreciar la cantidad de este roce.

3) Los resultados del cálculo se hacen más sencillos y más seguros; lo último se verifica por omitirse una fuerza resistente, obteniéndose un resultado mayor que el verdadero; luego cuando se construye un muro que puede resistirá este mayor empuje, su estabilidad será mayor. Además, como siempre se necesita in-

troducir un coeficiente de seguridad, este puede ser menor.

Sin embargo, en un artículo separado, se tratará también del efecto que produce dicho rozamiento; así será posible compararar un resultado con otro.

Omitiendo así el efecto del roce, que entre el muro y las tierras se verifica, debemos escribir $\rho=0$, por lo cual la fórmula general se cambia en

$$D=\frac{X \operatorname{sen} \varphi-cS \operatorname{sen} \alpha}{\cos(\varepsilon+\varphi)} \tag{34}$$

en donde X y S son funciones de φ, y se debe tomar el valor máximo, que D puede tener, cuando este ángulo varía entre los límites 0 y $\alpha-\varepsilon$.

Sea AFK (fig. 25) un prisma cualquiera entre estos límites y con superficie horizontal; se tendrá

$$X=g \triangle AFK=\tfrac{1}{2}g . AF . AK \operatorname{sen} \sphericalangle FAK$$

$$=\tfrac{1}{2} g . \frac{H}{\cos \varepsilon} \frac{H \operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)}$$

$$=\tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} . \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)},$$

$$S=AK=\frac{H}{\cos(\alpha-\varphi)};$$

por lo que sale

$$D=\frac{1}{\cos(\alpha-\varphi)\cos(\varepsilon+\varphi)}\left(\tfrac{1}{2}g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)-c\, H \operatorname{sen} \alpha\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}g \frac{H^2}{\cos \varepsilon}\left\{\frac{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)-\dfrac{2c}{Hg} \operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon}{\cos(\alpha-\varphi)\cos(\varepsilon+\varphi)}\right\}. \tag{m}$$

Como $\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\varepsilon-2\varphi)-\cos(\alpha-\varepsilon)]$,

y $\cos(\alpha-\varphi)\cos(\varepsilon+\varphi)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\varepsilon-2\varphi)+\cos(\alpha+\varepsilon)]$,

se tiene también

$$D=\tfrac{1}{2}g \frac{H^2}{\cos \varepsilon}\left\{\frac{\cos(\alpha-\varepsilon-2\varphi)-\cos(\alpha-\varepsilon)-\dfrac{4c}{gH} \operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon}{\cos(\alpha-\varepsilon-2\varphi)+\cos(\alpha+\varepsilon)}\right\}.$$

Póngase para abreviar

$$\left.\begin{array}{l}\alpha-\varepsilon-2\varphi=\mathrm{u}\\ \cos(\alpha-\varepsilon)+\dfrac{4c}{gH}\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon=\mathrm{b}\\ \cos(\alpha+\varepsilon)=\mathrm{b}'\end{array}\right\},\qquad (a)$$

expresiones de las cuales sólo u es variable; se tendrá

$$D=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{\cos u-b}{\cos u+b'}$$

Sólo el último factor es variable; luego si se escribe

$$U=\frac{\cos u-b}{\cos u+b'},\quad \text{resulta}\quad D=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}.U: \qquad (b)$$

y D será un máximo cuando lo sea U, cambiando de valor la variable u. Para que U sea un máximo, debe ser $\frac{dU}{du}=0, \frac{d^2U}{du^2}<0$. Pero tenemos

$$U\cos u+b'U=\cos u-b;$$

luego por diferenciación según u, se saca

$$\cos u\frac{dU}{du}-U\operatorname{sen}u+b'\frac{dU}{du}=-\operatorname{sen}u,$$

$$(\cos u+b')\cdot\frac{dU}{du}=(U-1)\operatorname{sen}u=\left(\frac{\cos u-b}{\cos u+b'}-1\right)\operatorname{sen}u;$$

de donde sale

$$\frac{dU}{du}=-(b+b')\cdot\frac{\operatorname{sen}u}{(\cos u+b')^2}. \qquad (c)$$

La condición $\frac{dU}{du}=0$ exige que en esta ecuación sea $\operatorname{sen}u=0$, esto es que $\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-2\varphi)=0$, ó bien que $\alpha-\varepsilon-2\varphi=0$, por lo que resulta

$$\varphi=\gamma=\frac{\alpha-\varepsilon}{2}=\tfrac{1}{2}\measuredangle FAJ. \qquad (35)$$

se traduce: *el plano de fractura divide en dos partes iguales el án-*

gulo que la pared forma con el talud natural.

Además, para el prisma del mayor empuje tenemos

$$X=G=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[\alpha-\varepsilon]}{\cos\frac{1}{2}[\alpha+\varepsilon]}, \tag{36}$$

$$S=A=\frac{H}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}, \tag{37}$$

$$D=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)-\frac{2c}{gH}\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right\}. \tag{38}$$

Estas ecuaciones se deducen de (m) y de las que preceden, sustituyendo allí para φ su valor

$\varphi=\gamma=\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$, de donde sale $\alpha-\varepsilon-\varphi=\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$,
$\alpha-\varphi=\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)$,
$\varepsilon+\varphi=\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)$.

La ecuación (38) manifiesta que el máximo empuje D es susceptible de valores negativos, si la cohesión c es distinta de cero y si la altura H de las tierras es bastante pequeña. Entonces, pues, no habrá empuje actual. Aumentando sucesivamente la altura H, se hallará por fin un empuje D=0, esto es, que hasta esta altura las tierras pueden sostenerse por su sola cohesión, sin que se necesite un muro para revestirlas. Dicha altura es evidentemente la altura de cohesión, la cual según lo dicho se halla por la sustitución D=0, ó bien cuando en la ecuación (38) el numerador del paréntesis se pone igual á cero, con tal que en lugar de H se escriba h. Así se consigue

$$\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)-\frac{2c}{gh}\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon=0,$$

resultando
$$h=\frac{2c}{g}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}; \tag{39}$$

lo que hemos hallado en el artículo II.

Ahora, la ecuación (38) puede escribirse también en la forma

$$D=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\left\{1-\frac{2c}{gH}\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right\},$$

lo que por la relación (39) equivale á

$$\left.\begin{aligned} D &= \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon}\left(1-\frac{h}{H}\right)\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}[\alpha-\varepsilon]}{\cos^2 \frac{1}{2}[\alpha+\varepsilon]} \\ &= \tfrac{1}{2} g \frac{H(H-h}{\cos \varepsilon}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}[\alpha-\varepsilon]}{\cos^2 \frac{1}{2}[\alpha+\varepsilon]}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Si aquí $H \underline{<} h$, no habrá empuje actual.

Falta demostrar que $\frac{d^2 U}{du^2} < 0$, lo que se necesita para el caso del máximo. A este fin, la ecuación (c) puede escribirse como sigue

$$\frac{dU}{du}\cdot(\cos u+b')^2 = -(b+b') \operatorname{sen} u. \tag{d}$$

Diferenciando otra vez, se obtiene

$$(\cos u+b')^2\cdot\frac{d^2 U}{du^2} - 2\frac{dU}{du}(\cos u+b') \operatorname{sen} u = -(b+b')\cos u\ ;$$

de donde

$$\frac{d^2 U}{du^2} = 2\frac{dU}{du}\cdot\frac{\operatorname{sen} u}{(\cos u+b')} - \frac{(b+b')\cos u}{(\cos u+b')^2};$$

y como $u=0$, se deduce

$$\frac{d^2 U}{du^2} = -\frac{b+b'}{(1+b')^2},$$

expresión que siempre es negativa. Sería cero, solo, si $b+b'=0$, esto es, si

$$\cos(\alpha-\varepsilon)+\cos(\alpha+\varepsilon)+\frac{4c}{gH} \operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon = 0,$$

$$2 \cos \varepsilon \left(\cos \alpha + \frac{2c}{gH} \operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon\right) = 0.$$

Como $\cos \varepsilon$ siempre es distinto de cero, debería ser $=0$ el paréntesis que no contiene sino cantidades positivas, por cuya propiedad sería $\alpha=90°$ y $c=0$, lo que solamente conviene á los líquidos perfectos. En este caso se hallaría también $\frac{dU}{du}=0$ para cualquier valor de φ, lo que indica que en los líquidos, cualquier prisma es de máximo empuje; y en verdad por $\alpha=90°$ y $c=0$, la ecuación (m) se convierte en

$$D=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}.$$

fórmula que expresa la presión lateral de un líquido perfecto.

§ 17.

Cálculo del empuje.

I Caso. si las tierras no tienen cohesión. Se debe poner $h=0$, por lo cual de (40) se sigue

$$\left.\begin{aligned} D&=\tfrac{1}{2}\,g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left(\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right)^2 \\ &\tfrac{1}{2}\,w\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

en donde

$$w=g\left(\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right)^2, \tag{42}$$

puede tomarse por peso específico de un líquido; de suerte que la segunda ecuación (41) nos manifiesta que *el empuje normal de tierras con superficie horizontal y sin cohesión, equivale al de un líquido perfecto, que tiene un peso específico expresado por la relación* (42).

> *REGLA PRÁCTICA I. Para hallar el empuje normal de tierras que tienen una superficie horizontal y ninguna cohesión, se calculará por la ecuación* (42) *el peso específico de un líquido que produciría el propio empuje; y hallado este peso específico, se obtendrá en seguida el empuje de dicho líquido mediante la segunda de las fórmulas* (41).

En el caso de ser vertical el paramento interior del muro, la fórmula (42) se hace más sencilla, tomando la expresión

$$w=g\ \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\,\alpha. \tag{43}$$

II Caso, si las tierras tienen cohesión. Sea D^o el empuje en el supuesto de no haber cohesión, y D^c el en el caso de haberla; entonces de (40) y (41) se sigue

$$D^o : D^c = H^2 : H\,(H-h) = 1 : 1 - \frac{h}{H},$$

de donde se saca

$$D^c = \left(1 - \frac{h}{H}\right) D^o. \tag{44}$$

REGLA PRÁCTICA II. Para hallar el mismo empuje en el caso de haber cohesión, se calculará primero el que corresponde al supuesto de no haberla, y en seguida el resultado encontrado se multiplicará por $1-\frac{h}{H}$, es decir por la unidad ménos la relación entre la altura de cohesión y la del muro que debe construirse.

Si en la segunda ecuación (40) se pone

$$H(H-h) = H'^2, \tag{45}$$

resulta

$$D = \tfrac{1}{2}\, g \frac{H'^2}{\cos\varepsilon} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right)^2,$$

lo que mediante (41) es el empuje de una masa que no tiene cohesión; obtiénese, pues, la

REGLA PRÁCTICA III. El empuje de tierras con cohesión y con la altura H, es idéntico al empuje de tierras sin cohesión, que tienen una altura

$$H' = \sqrt{H(H-h)}. \tag{45}$$

Construcción de H'. Sea $H = AB$ (fig. 26) la altura de las tierras dadas que tienen cohesión. Descríbase una semicircunferencia sobre AB, hágase $Aa = H-h$, tírese Ca paralela al horizonte, hágase $AB' = AC$ y será $AB' = H'$, es decir, igual á la altura de tierras sin cohesión que producen igual empuje.

Según la construcción, AB' es la media proporcional entre AB y Aa, es decir entre H y H—h, porque $AB' = AC =$

$\sqrt{AB.Aa} = \sqrt{H(H-h)}.$

Para evitar largos cálculos, sirve la tabla IV, en donde se hallan los valores de

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\,[\alpha-\varepsilon]}{\cos \frac{1}{2}\,[\alpha+\varepsilon]}\right)^2 = u. \tag{46}$$

para los valores de tang α y tang ε que ocurren con mayor frecuencia. En vez de (42) se sustituye simplemente

$$w = g \cdot u. \tag{42*}$$

TABLA IV.

	tang ε para el talud interior de la pared.							
tang α para el talud natural.	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
1,0	0,172	0,144	0,138	0,135	0,131	0,118	0,108	0,094
1,1	0,196	0,167	0,161	0,157	0,153	0,139	0,129	0,114
1,2	0,219	0,189	0,184	0,180	0,175	0,161	0,150	0,134
1,3	0,242	0,212	0,206	0,202	0,197	0,182	0,171	0,155
1,4	0,265	0,234	0,228	0,223	0,218	0,203	0,192	0,175
1,5	0,286	0,255	0,249	0,244	0,239	0,224	0,212	0,195
1,6	0,307	0,275	0,269	0,265	0,260	0,244	0,232	0,214
1,7	0,327	0,295	0,289	0,284	0,279	0,264	0,251	0,233
1,8	0,346	0,314	0,308	0,304	0,298	0,283	0,270	0,252
1,9	0,364	0,332	0,326	0,322	0,317	0,301	0,288	0,270
2,0	0,382	0,350	0,344	0,339	0,334	0,308	0,306	0,287
2,1	0,399	0,367	0,361	0,356	0,351	0,335	0,322	0,304

Ejemplo. Se busca el empuje de tierras con superficie horizontal, despreciándose el roce sobre la pared, y se dan las cantidades siguientes:

altura del muro de contensión . . . . $H = 10$ metros,
talud del paramento interior del muro . . tang $\varepsilon = \frac{1}{6}$,
peso de las tierras por metro cúbico . . . . . . $g = 1500$ kilog.
talud natural . . . . tang $\alpha = 1,27$,
altura de cohesión . . . . $h = 1$ metro.

Resolución. En primer lugar, en la tabla se buscará el valor de $\frac{w}{g} = u$ para tang $\varepsilon = \frac{1}{6}$ y tang $\alpha = 1,27$.

Para tang $\varepsilon = \frac{1}{6}$ y tang $\alpha = 1{,}2$ es...... $\frac{w}{g} = 0{,}161$

Para tang $\varepsilon = \frac{1}{6}$ y tang $\alpha = 1{,}3$ es...... $\frac{w}{g} = 0{,}182$

Difer. $= 0{,}1$ $\quad 0{,}021.$

Por tanto $\quad 0{,}1 : 0{,}021 = (1{,}27 - 1{,}20) : x\,;$

$$x = \frac{0{,}07 . 0{,}021}{0{,}1} = 0{,}015\,;$$

luego $\quad \frac{w}{g} = 0{,}161 + x = 0{,}176.$

El peso específico del líquido de igual empuje es
$$w = 0{,}176 . g = 0{,}176 . 1500 = 264 \text{ kilogramos.}$$

El empuje de este líquido sería

$$D = \tfrac{1}{2}\, w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = \tfrac{1}{2} . 264 . 100 . 1{,}0138 = 13382 \text{ kilogramos,}$$

idéntico al que se debe obtener en la hipótesis de no haber cohesión en las tierras dadas. Luego para hallar el empuje en el caso de cohesión, se habrá de multiplicar el último resultado

por $1 - \frac{h}{H} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$,

lo que da

$$D = \frac{9}{10} . 13382 = 12043 \text{ kilogramos} = 12{,}043 \text{ toneladas.}$$

Luego, este empuje se verifica sobre el muro de contensión por un metro de largo.

Continuará.