

---

# TRATADO DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA

POR EL MISMO PROFESOR

Continuación de la página 330, número 117

IV Posiciones en la línea de tierra.—Por cuanto el punto I [fig. 10] se encuentra en la intersección de estos planos, se hallará en el horizontal y vertical á un tiempo: como está en el horizontal, la proyección vertical se hallará en la línea de tierra (III, 1<sup>o</sup>); y como está en el vertical, la proyección horizontal se hallará en la misma línea (id, 2<sup>o</sup>); es decir que:

*Si el punto del espacio se encuentra en la línea de tierra, en la misma confundidas en el punto ó coincidiendo con él se hallarán sus proyecciones.*

33. CASO INVERSO.—En el n<sup>o</sup> anterior, dadas en perspectiva caballera las posiciones de los puntos, se han encontrado las de sus proyecciones en descriptiva ó referidas á la línea de tierra después del rebatimiento; trátese ahora del problema inverso, es á saber: dadas las proyecciones en descriptiva, *determinar las posiciones correspondientes de los puntos del espacio en perspectiva caballera ó sea referidos á los planos de proyección*, lo que

haremos en el orden siguiente:

I Posiciones á distinto lado de la línea de tierra.—*a*). En virtud del enhiestamiento sube, como se sabe (nº 29), la parte inferior ó visible del plano horizontal (figs. 8 y 7), hasta formar un diedro igual á un recto con la fija y visible del plano vertical; luego, considerando el primer caso de la figura 8, con esa parte del plano horizontal, subiendo el punto *a*, queda delante del plano vertical; por lo que la proyectante correspondiente queda también delante de este plano. Mas, como subsisten, con el plano vertical, fijas la proyección *a'* y la proyectante respectiva que se hallan por encima de la línea de tierra, la primera cortará la segunda por delante del mismo plano, pero encima del horizontal, *con lo que resulta en el espacio un punto situado en el diedro primero ó principal.*

*b*) En virtud del enhiestamiento indicado, separándose la parte oculta del plano horizontal de la superior ó visible del plano vertical, baja aquélla; luego, considerando el tercer caso de la figura 8, con esa parte del plano horizontal, bajando el punto *c* queda atrás del plano vertical; por lo que la proyectante correspondiente queda también atrás de este plano. Mas, como subsisten, con el plano vertical, fijas la proyección *c'*, y la proyectante respectiva que se hallan por debajo de la línea de tierra, la primera proyectante cortará la segunda por atrás del mismo plano, pero debajo del horizontal, *con lo que resulta en el espacio un punto situado en el diedro tercero ú opuesto.*

II Posiciones al mismo lado de la línea de tierra.—*a*). En virtud del enhiestamiento indicado, con la parte oculta del plano horizontal, bajando el punto *b* (2º caso de la figura), queda atrás del plano vertical, por lo que la proyectante correspondiente queda también atrás de este plano. Mas, como subsisten, con el plano vertical, fijas la proyección *b'* y la proyectante respectiva que se hallan por encima de la línea de tierra, la primera proyectante cortará la segunda por atrás del mismo plano, pero encima del horizontal, *con lo que resulta en el espacio un punto situado en el diedro segundo ó de atrás.*

b) En virtud del mismo enhiestamiento separándose la parte inferior ó visible del plano horizontal de la oculta ó inferior del plano vertical, sube aquélla; luego con esa parte del plano horizontal subiendo el punto d (caso 4º de la figura), queda delante del plano vertical; por lo que la proyectante correspondiente queda también delante de este plano. Mas, como subsisten, con el plano vertical, fijas la proyección  $d'$  y la proyectante respectiva que se hallan por debajo de la línea de tierra, la primera proyectante cortará la segunda por delante del mismo plano, pero debajo del horizontal, *con lo que resulta en el espacio un punto situado en el diedro cuarto ó de abajo.*

III Posiciones equidistantes á diferente lado de la línea de tierra.—a). Vale lo dicho en a), I, con la circunstancia que sería en este supuesto  $aa_0 = a'a_0$  (fig. 8), magnitudes que miden las distancias del punto del espacio á los planos de proyección (Conscs. 3ª y 4ª): por lo cual equidista el punto de estos planos; y así *que se halle en el plano bisector del cuadrante ó diedro primero.*

b). Por lo expuesto en b), I y por una razón igual á la anterior, *el punto se encontrará en el plano bisector del cuadrante ó diedro tercero ú opuesto.*

IV Proyecciones confundidas en un punto al mismo lado de la línea de tierra.—En virtud de los razonamientos emitidos en lo II y III, *el punto se hallará en el diedro segundo ó cuarto, según que las proyecciones estén por encima ó debajo de la línea de tierra.*

V Una de las proyecciones está en la línea de tierra y la otra no.—En este caso la línea proyectante que corresponde á la primera se halla totalmente en el plano donde se encuentra la segunda; pues se sabe, que “Si en un punto de la intersección de dos planos perpendiculares entre sí se levanta una recta perpendicular á alguno de ellos, estará la recta totalmente en el ótro;” luego la proyectante determinada por aquélla cortará la que determina ésta en el pie, ó sea en la misma proyección, cuyo nombre es contrario á la situada en la línea de tierra; en otros términos: *si una de las proyecciones está en la línea de tierra, se hallará el punto del espacio en el plano de*

*proyección de nombre contrario, coincidiendo con la otra proyección.*

Así, encontrándose la proyección vertical en la línea de tierra, el punto se hallará en el plano horizontal, parte anterior ó posterior, según que la proyección de nombre contrario á aquella esté por debajo ó encima de la línea de tierra; y si es la proyección horizontal la que se encuentra en la línea de tierra, el punto se hallará en el plano vertical, parte superior ó inferior, según que la proyección de nombre contrario á aquella esté por encima ó debajo de la línea de tierra.

VI Proyecciones que coinciden en la línea de tierra.—Por la razón indicada en el caso anterior, las proyectantes, que se hallan respectivamente en los planos de proyección, sólo tienen común el punto de la línea de tierra por donde pasan; luego estará allí el punto del espacio; en otros términos: *si las proyecciones se confunden en un punto de la línea de tierra, coincidiendo con el mismo se hallará el punto del espacio.*

34. RESUMEN.—Como consecuencia de todo lo expuesto en el n.º precedente, dadas en descriptiva las proyecciones de un punto, se determina su posición en el espacio, mediante las siguientes reglas:

1.<sup>a</sup> *Si las proyecciones se encuentran á distinto lado de la línea de tierra, se hallará el punto del espacio en el diedro principal, ó en el opuesto, según que esté la proyección horizontal por debajo ó encima de la línea de tierra.*

2.<sup>a</sup> *Si las proyecciones se encuentran al mismo lado de la línea de tierra, se hallará el punto del espacio en el diedro de atrás ó de abajo, según que estén dichas proyecciones por encima ó debajo de la línea de tierra.*

3.<sup>a</sup> *Si las proyecciones se encuentran á distante lado de la línea de tierra, pero equidistantes de la misma, se hallará el punto del espacio en el plano bisector del diedro principal ú opuesto, según que esté la proyección horizontal por debajo ó encima de la línea de tierra.*

4.<sup>a</sup> *Si las proyecciones se encuentran confundidas en un punto, se hallará el del espacio en el plano bisector del diedro de atrás ó de abajo, según que esté aquel por encima ó debajo de la línea de tierra.*

5<sup>a</sup> Si una de las proyecciones está en la línea de tierra, se hallará el punto del espacio en el plano de proyección de nombre contrario, coincidiendo con la otra proyección.

6<sup>a</sup> Si las proyecciones se confunden en un punto de la línea de tierra, en ésta, coincidiendo con el mismo, se hallará el punto del espacio.

---

## II

### DE LA RECTA

35. NOCIÓN DE LA RECTA.—Se sabe que *la línea es la extensión que tiene una sola dimensión, longitud*; y, así como el punto se lo puede considerar como el límite de una línea n<sup>o</sup> 16, ésta lo puede ser de una superficie, ó es la separación de dos partes distintas de ella, ó la intersección de dos superficies. *Línea recta es la que tiene todos sus puntos en una misma dirección*, ó, lo que es lo mismo, *el lugar geométrico de todos los puntos que definen una sola dirección*. Por tanto, *dos rectas no pueden cortarse más que en un punto*; luego, *si dos rectas tienen una parte ó dos puntos comunes, coinciden totalmente*; y si, de conformidad con lo que precede, *dos superficies que se cortan son planas, la intersección es una línea recta*.

36. PROYECCION DE UNA LÍNEA.—*La proyección sobre un plano de una línea cualquiera es otra que resulta proyectando sobre el plano todos los puntos de aquélla*. Como la línea resultante es lo que se llama en Geometría un *lugar geométrico* (1), se puede también decir que *la proyección sobre un plano de una línea cualquiera es el lugar geométrico de las proyecciones de todos sus puntos*. En el sistema adoptado (núms. 17 y 22) las líneas proyectantes de todos los puntos de la dada, por ser perpendiculares al plano de proyección, determinan una superficie perpendicular á este plano, y se la llama *superficie proyec-*

---

(1) Se sabe, que "*Lugar geométrico* de un punto es la extensión cuyos puntos tienen una ó muchas propiedades comunes, características ó exclusivas de dichos puntos."

*tante ó, con más propiedad, cilindro proyectante.*

37. PROYECCIÓN DE UNA RECTA.—La definición que hemos dado de *proyección de una línea*, por ser tan general, comprende la relativa á la recta; pero la sencillez de esta magnitud geométrica ofrece las particularidades que pasamos á considerar:

1.<sup>a</sup> Es manifiesto que la recta dada y la línea proyectante de un punto cualquiera de la misma determinan un plano perpendicular al plano de proyección; y como las demás proyectantes, por tener un punto en el primero, es á saber, el respectivo de la recta dada, y ser perpendiculares al segundo, son paralelas entre sí (2), se encontrarán todas en dicho primer plano que, de conformidad con lo indicado en el n.<sup>o</sup> anterior, se lo llama en este caso particular, *plano proyectante*. Por lo cual, *plano proyectante de una recta con relación á otro, es el que pasa por la recta perpendicularmente á éste*. En tal virtud sentamos el siguiente

Tcor. *La proyección de una recta sobre un plano es otra que resulta de la intersección del plano proyectante con el plano de proyección.*

Demostración. Porque, siendo  $AB$  [fig. 11] la recta dada y  $PQ$  el plano sobre el cual se la proyecta, los pies  $a, c, d, \dots, b$  de las líneas proyectantes  $Aa, Cc, Dd, \dots, Bb$ , serán las proyecciones de los diferentes puntos de la recta; y el conjunto de ellas, la proyección de la misma. Ahora bien, por lo dicho, tales líneas determinan el plano proyectante  $ABba$  de la recta, plano cuya intersección  $ab$  con el  $PQ$  es, como se sabe, *otra recta que contiene además, los pies de todas las posibles líneas proyectantes de los puntos de aquella; luego esa recta  $ab$ , intersección del plano proyectante con el plano de proyección, es la proyección de ésta.*

L. Q. D. D.

2.<sup>a</sup> En consecuencia, como una recta queda determinada cuando se conocen dos puntos cualesquiera de la misma, *para hallar la proyección de una recta dada, bas-*

---

(2) Se sabe, que "Si por un punto de un plano se traza una recta paralela á otra situada en el mismo, se halla toda esa recta en éste plano."

tará formar las proyecciones de dos cualquiera de sus puntos: la recta que los úna en el plano de proyección, será la proyección de aquélla.

3.<sup>a</sup> Por tanto, y de conformidad con lo expuesto acerca del punto [n.<sup>o</sup> 18], se infiere que

*Dada una recta del espacio y el plano en que se la ha de proyectar, queda completamente determinada la proyección de la recta.*

Porque siempre se puede dirigir por la recta un plano perpendicular al plano de proyección, que será el plano proyectante de la recta; y la línea en que se corten los dos, la proyección que se busca; ó se pueden también hallar las proyecciones de dos puntos cualesquiera de la recta, las que, unidas por ótra en el plano de proyección, definen la proyección buscada.

38. EXCEPCIONES.—1.<sup>a</sup> Pero el teorema demostrado en el n.<sup>o</sup> precedente no tiene la generalidad apetecible *hay una excepción, en efecto, cuando la recta es perpendicular al plano de proyección.* Pues que, en este caso, el plano proyectante se reduce, por decirlo así, á una línea proyectante que no es sino la recta de que se trata, cuya proyección, por lo mismo, como la de todos sus puntos, se reducen á uno solo, á saber: *el de intersección de la recta y el plano.*

2.<sup>a</sup> Respecto de la tercera particularidad, así como se ha visto tratándose del punto, la recíproca tampoco es cierta; de manera que

*Dada en un plano una recta como proyección de ótra del espacio sobre el plano, la recta del espacio no queda con eso determinada.*

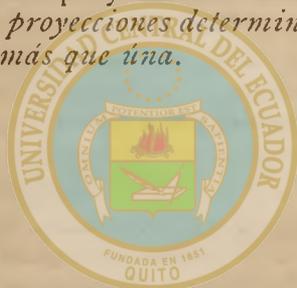
Porque la recta proyección fija un plano proyectante en el que se pueden situar infinitas rectas y líneas cualesquiera, que se proyectarán según la recta dada en el plano de proyección; quiere decir, que tienen todas ellas por proyección esta recta. Luego no hay en el plano proyectante una línea definida á que sólo corresponda como proyección tal recta.

39. CASO DE DETERMINACION.—Pero si se consideran dos planos que se corten, y en especial el sistema que hemos adoptado [n.<sup>o</sup> 22], resulta que

Si en cada uno de los dos planos se da la proyección de una recta del espacio, ésta quedará por lo general determinada; ó, en otros términos: una recta del espacio cuyas dos proyecciones se conocen, queda generalmente determinada. Porque sean  $ab$  (fig. 12) la recta dada en el uno de los planos, que lo supondremos el *horizontal de proyección*, y  $a'b'$  la recta en el otro, que asimismo lo supondremos el *vertical de proyección*; y ambos, en perspectiva. En esta virtud, debiendo encontrarse la recta del espacio en cada uno de los planos proyectantes  $abA$ ,  $a'b'B$  definidos respectivamente, el primero por la proyección  $ab$  y la proyectante  $aA$ ; y el segundo, por la  $a'b'$  y la proyectante  $b'B$  (nº 37), la recta del espacio será la que tengan ellos común; es decir, *la recta donde se corten los dos planos*; pero tal es la  $AB$ ; luego á sólo ésta corresponden las proyecciones dadas; ó, lo que es lo mismo, *dtchas proyecciones determinan una recta en el espacio, y nada más que una.*

L. Q. D. D.

(Continuará).



ÁREA HISTÓRICA  
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL