TEORIA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

Y DE LOS MUROS DE CONTENSION Y REVESTIMIENTO.

POR

JOSE KOLBERG, S. J. — Profesor en la Universidad

(Continuación. – V. el nº 75, pág. 345)

§ 18.

Representación gráfica del empuje.

I. Caso de no haber conhesión. Por las ecuaciones (36) y (41) es el peso G y el empuje D del prisma de mayor empuje AFE (fig. 27).

$$G=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\,.$$

$$D=\tfrac{1}{2}\,g\,\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right)^2;\ \text{luego}$$

$$D:G=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon):\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon). \qquad \text{(a)}$$

El ángulo FAE de la base del prisma es $\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)=\gamma$; luego será $\sphericalangle FEA=90^\circ-\sphericalangle BAE=90^\circ-\varepsilon-\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)=90^\circ-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{2}\alpha=90-\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)$; y en el $\triangle$ AFE se obtiene la relación

$$FE:AF=\operatorname{sen}FAE:\operatorname{sen}FEA=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon):\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon),$$

lo que comparado con (a) conduce á la proporción:

$$D : G = FE : AF. \qquad (47)$$

Esto es: *El empuje es al peso del prisma que se separa de la otra masa, como en el perfil es el lado horizontal á la pared del muro.*

Con esta propiedad es fácil construir un prisma que represente el empuje [fig. 28]. Dado el talud natural y posición de la pared AF, el ángulo FAJ comprendido entre ambos se dividirá en dos partes iguales por AE, que será el plano de rotura, y así se obtiene el prisma del mayor empuje AFE. En seguida se describe un arco al rededor de F con el radio FE, de manera que sea FL=FE. Tirando finalmente la recta LE, el prisma FLE representará el empuje mismo.

Demostración.

$$\triangle FLE : \triangle FAE = FL : FA = FE : AF, \text{ luego}$$

$$g.\triangle FLE : g.\triangle FAE = FE : AF.$$

Pero g. $\triangle$FAE es el peso G del prisma de mayor empuje; por donde

$$g.\triangle FLE : G = FE : AF.$$

Esta proporción tiene tres términos iguales á otros tres de la (47), resultando que es también

$$g.\triangle FLE = D;$$

es decir, que el prisma FLE representa el empuje.

El dibujo puede remplazar al cálculo muchas veces, por ejemplo si faltan las tablas necesarias. Construido el triángulo FLE con la mayor exactitud posible, se medirá uno de sus lados y la altura corrspondiente para hallar el área, que multiplicada por el peso específico g de las tierras dará el empuje D que se busca.

II. Caso de haber cohesión [fig. 29].

Tenemos $D^c = \left(1 - \frac{h}{H}\right) D_o$

$$D^c : D_o = H - h : H. \qquad [b]$$

Construido el $\triangle$ FLE como en el caso anterior, dividiremos AF según la proporción AD : AF = H − h : H, lo que se efectúa como la figura 29 lo indica. Después se tira DC paralela á AE, y se junta L con C; el $\triangle$ CLE representará el empuje pedido.

Demostración.

$$\triangle LCE : \triangle LFE = CE : EF = AD : AF = H-h : H;$$

luego $$g \triangle LCE : g \triangle LFE = H-h : H;$$

$$g. \triangle LCE : D^{o} = H-h : H;$$

de consiguiente, tomando en cuenta la proporción [b], será

$$g. \triangle LCE = D^{c}.$$

Además, el efecto producido por la cohesión, está representado por el $\triangle$FCL.

§ 19.

Método gráfico de representar el aumento de la presión que se verifica con un aumento de la altura.

Conforme á la ecuación (40) es

$$D = kH\,(H-h), \tag{a}$$

si por brevedad se escribe

$$k = \frac{1}{2}\,\frac{g}{\cos \varepsilon}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right)^{2}. \tag{b}$$

Para otra altura x en vez de H, el empuje correspondiente, al que designaremos por y, se hallará igual á

$$y = k\,x\,(x-h). \tag{c}$$

Así que, entre y y D existe la relación

$$y : D = x\,(x-h) : H\,(H-h). \tag{d}$$

Sea O el punto de la pared [fig.30] que corresponde á la altura $\frac{1}{2}$h y *ra* una recta tirada por O en una dirección cualquiera y terminada por las dos horizontales del pie y corona del muro. Haciendo OF′=OF y tirando f′F′ horizontalmente, y además por otro punto N de la pared Nn en igual dirección, el trapecio F'f' Nn representará el empuje sobre FN, si el trapecio F'f'aA representa el que actúa sobre toda la pared FA.

Demostración. Como los triángulos OAa, ONn, OF'f' son semejantes, y sus alturas son $(H-\frac{1}{2}h)$, $(x-\frac{1}{2}h)$ y $\frac{1}{2}h$, se saca

$$\frac{Aa}{(H-\frac{1}{2}h)}=\frac{Nn}{(x-\frac{1}{2}h)}=\frac{F'f'}{\frac{1}{2}h}.$$

Este cociente es independiente de x; designándolo por m, se deduce

$$F'f'=\tfrac{1}{2}\,mh,$$
$$N\,n=m\,(x-\tfrac{1}{2}h),$$
$$Aa=m\,(H-\tfrac{1}{2}h),$$

luego sumando se tiene

$$(F'f'+Nn)=mx,$$
$$(F'f'+Aa)=mH,$$
$$\text{área } F'f'Nn=\tfrac{1}{2}\,(F'f'+Nn)\,(x-h)=\tfrac{1}{2}\,mx\,(x-h),$$
$$\text{área } F'f'Aa=\tfrac{1}{2}\,(F'f'+Aa)\,(H-h)=\tfrac{1}{2}mH\,(H-h),$$
$$\text{área } F'f'Nn:\text{área } F'f'Aa=x\,(x-h):H\,(H-h);$$

y por la proporción señalada en (d) se transformará en

$$y:D=\text{área } F'f'Nn:\text{área } F'f'Aa;$$

con lo cual el teorema queda demostrado.

Si se toma cualquiera otra parte NN' de la pared, que no esté determinada por la corona y pie de la última, es evidente que la presión que sufre, se representa por el trapecio NnN'n' que está sobre NN'. Haciendo á NN' cada vez menor, resulta el empuje sobre el punto N de la pared, relativamente, (no absolutamente) igual á la recta Nn.

La parte FF' de la pared no sufre ninguna presión actual. Mas, si h=0, esto es sino hubiese cohesión, coincidirían los puntos F', O y F. Aasí que, para tierras sin cohesión, la representación gráfica es semejante á la que hemos encontrado ya para los líquidos en el § 4, fig. 8.

§ 20.

Momento y centro del empuje.

Si M es el punto donde se aplica la resultante de todos los empujes particulares (fig. 31), entonces M será también el *centro del empuje* total D, puesto que este es idéntico á aquella resultante.

El momento del empuje total será D. AM=D.$\frac{a}{\cos \varepsilon}$, en donde a designa la altura á que el centro del empuje está situado, contándola desde la base.

El momento de la resultante es igual á la suma de los momentos de las componentes. Luego se necesita buscar éstos.

Ya hemos visto que si es y el empuje ejercido sobre la parte FN de la pared que corresponde á la altura x, este empuje es, (ecuación (c) del § 19),

$$y=kx\,(x-h).$$

Dando á FN un incremento infinitamente pequeño NN′ que orresponde al aumento de la altura dx, el aumento de la presión será

$$dy=k\,(2x-h)\,dx, \qquad (a)$$

que también es el empuje sobre NN′, suponiéndolo infinitamente pequeño, y además es una de las componentes del empuje total D. El brazo de esta componente es AN, pues en comparación á AN, que es distancia finita, puede despreciarse la distancia infinitamente pequeña entre N y el punto en donde dy se aplica.

Como $AN=\frac{H-x}{\cos \varepsilon}$, el momento de dy será

$$m=dy\cdot\frac{H-x}{\cos \varepsilon}=\frac{k}{\cos \varepsilon}(H-x)\,(2x-h)dx. \qquad (b)$$

Ahora, las presiones actuales sólo se verifican entre A y F′, esto es entre límites que son idénticos á las alturas h y H; de donde se sigue que en la última ecuación (b) se deben sustituir todos los valores posibles de x que son mayores que h y menores que H, sumando al fin todas las ecuaciones que se obtengan, para sacar el momento de la resultante; esto es: *el momento del empuje es la integral de la expresión* (b) *entre los límites* h *y* H. Resulta, pues,

$$D.\frac{a}{\cos \varepsilon}=\frac{k}{\cos \varepsilon}\int_h^H (H-x)\,(2x-h)\,dx,$$

$$D.\,a=k\int_h^H \left[-2x^2+(2H+h)x-Hh\right]dx. \qquad (c)$$

Ahora es

$$\int_0^x [-2x^2+(2H+h)x-Hh]dx=-\tfrac{2}{3}x^3+Hx^2+\tfrac{1}{2}hx^2-Hhx,$$

$$\int_0^H [-2x^2+(2H+h)x-Hh]dx=\tfrac{1}{3}H^3-\tfrac{1}{2}H^2h, \qquad (d)$$

$$\int_0^h [-2x^2+(2H+h)x-Hh]dx=-\tfrac{1}{6}h^3.$$

Las dos últimas ecuaciones resultan de la primera, escribiendo respectivamente H y *h* en lugar de *x* y reduciendo.

Como $$\int_a^h zdt=\int_0^h zdt-\int_0^a zdt,$$

se infiere que

$$\int_h^H [-2x^2+(2H+h)x-Hh]dx=\tfrac{1}{3}H^3-\tfrac{1}{2}H^2h+\tfrac{1}{6}h^3;$$

luego será

$$D.\,a=k(\tfrac{1}{3}H^3-\tfrac{1}{2}H^2h+\tfrac{1}{6}h^3)=\tfrac{1}{6}k(2H^3-3H^2h+h^3)$$
$$=\tfrac{1}{6}k[2(H^3-h^3)-3h(H^2-h^2)].$$

Siendo $D=kH(H-h)$, tendremos

$$a=\frac{\tfrac{1}{6}k[2(H^3-h^3)-3h(H^2-h^2)]}{kH(H-h)}=\tfrac{1}{6}\cdot\frac{2H^2-Hh-h^2}{H}$$

$$=\frac{1}{6H}(H-h)(2H+h)=\tfrac{1}{3}H\left(1-\frac{h}{H}\right)\left(1+\frac{h}{2H}\right). \qquad (47)$$

Esta es la altura en que se halla el centro del empuje, contándola verticalmente desde el pie del muro.

El brazo del empuje es

$$AM=\frac{a}{\cos\varepsilon}=\frac{(H-h)(2H+h)}{6H\cos\varepsilon}=\frac{\tfrac{1}{3}H\left(1-\frac{h}{H}\right)\left(1+\frac{h}{2H}\right)}{\cos\varepsilon}, \qquad (48)$$

y su momento,

$$M=D.AM=kH(H-h).\frac{a}{\cos\varepsilon}=\frac{k}{6\cos\varepsilon}.(H-h)^2(2H+h),$$

$$=\frac{kH^3}{3\cos\varepsilon}\left(1-\frac{h}{H}\right)^2\left(1+\frac{h}{1H}\right), \qquad (49)$$

ó bien cuando para k se sustituye su valor que está en (b) del § anterior,

$$M=\tfrac{1}{6}.\frac{g}{\cos^2\varepsilon}H^3\left(1-\frac{h}{H}\right)^2\left(1+\frac{h}{2H}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right)^2. \qquad (50)$$

Estas fórmulas tienen lugar, cuando hay cohesión en las tierras; mas si no la hubiese, sería $h=0$, y las ecuaciones se simplificarían mucho tomando las formas:

$$a=\tfrac{1}{3}H;\ AM=\tfrac{1}{3}AF;\ M=D.\tfrac{1}{3}AF=\tfrac{1}{3}\frac{H^3}{\cos\varepsilon}.k. \qquad (51)$$

Luego en tierras sin cohesión, el centro del empuje se halla en la tercera parte de la altura, lo mismo que en los líquidos.

Construcción del centro del empuje. Como uno de los trapecios posibles, F′f′ Aa (fig. 30), que pueden construirse sobre AF′, es la representación gráfica del empuje total, y como la recta horizontal Nn designa el empuje en un punto N cualquiera entre A y F′, se sigue que el centro del empuje se hallará en el mismo nivel que el centro de gravedad del trapecio F′f′ Aa; de manera que ambos centros tienen igual distancia á la base Aa. La posición del centro S de gravedad del trapecio F′f′ Aa, se halla de esta manera:

Construído el trapecio F′f′ Aa (fig. 32), como se ha indicado en el último párrafo, se corta Aa por su medio en B, se tira OB, y después de haber prolongado F′f′ hasta que sea f′ C=Aa y tomado AE=F′f′, se tira CE. El punto S en donde CE corta á OB es centro de gravedad del trapecio F′f′ Aa; luego una horizontal tirada por S encontrará á la pared AF en el centro del empuje M.

§ 21.

Tierras horizontales que tienen una sobrecarga.

El caso es semejante al que hemos visto en el § 15; en vez del peso del prisma se deberá sustituir éste más la sobrecarga. De suerte que es (fig. 33).

$$\begin{aligned} X&=g.\triangle AFK+p.\ FK\\ &=\tfrac{1}{2}\,g.H.\ FK+p.\ FK \end{aligned}$$

$$=\tfrac{1}{2}g.\left(1+\frac{2p}{gH}\right).H.FK$$
$$=\tfrac{1}{2}g'.H.\ FK,$$

si por abreviar se pone

$$g'=g\left(1+\frac{2p}{gH}\right)=g+\frac{2p}{H}. \tag{52}$$

Estas resoluciones manifiestan que, *el empuje es igual al de tierras sin sobrecarga, con tal que en lugar de su peso específico* g, *que es el verdadero, se sustituya el mayor* g′ *señalado en la relación* (52).

El ángulo de rotura

$$\varphi=\gamma=\tfrac{1}{2}\,(\alpha-\varepsilon) \tag{53}$$

es independiente del peso específico, luego también está comprendido en este caso con idéntico valor.

Sea D′ el empuje; la ecuación (38) nos lo dará á conocer, con sólo escribir g′ en vez de g, y así se tiene

$$D'=\tfrac{1}{2}g'\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)-\dfrac{2c}{g'H}\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right\},$$

y cuando se efectúa la sustitución del valor de g′ que está en (52), se deduce

$$D'=\tfrac{1}{2}g\left(1+\frac{2p}{gH}\right)\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)-\dfrac{2c}{gH\left(1+\dfrac{2p}{gH}\right)}\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}(gH+2p)\frac{H}{\cos\varepsilon}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)-\dfrac{2c}{(gH+2p)}\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{H}{\cos\varepsilon}\left\{\frac{(gH+2p)\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)-2c\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right\}. \tag{54}$$

Llamemos h′ la altura en que estas tierras pueden sostenerse por sí mismas; siendo para aquella D′=0, resultará

$$(gh'+2p)\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)=2c\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon, \tag{a}$$

$$h'=\frac{2c}{g}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}-\frac{2p}{g}=h-\frac{2p}{g}, \tag{55}$$

que es la altura de cohesión en el caso de sobrecarga y que ya hemos encontrado en la ecuación (33).

Si el valor que tiene $2c \operatorname{sen} \alpha \cos \varepsilon$ en (a), se sustituye en (54), se consigue que sea

$$D' = \tfrac{1}{2}\, g \frac{H\,(H-h')}{\cos \varepsilon} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\,(\alpha-\varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}\,(\alpha+\varepsilon)}\right)^2 \qquad (56)$$

y según la relación (55)

$$D' = \tfrac{1}{2}\, g \frac{H\,(H-h+\frac{2p}{g})}{\cos \varepsilon} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\,(\alpha-\varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}\,(\alpha+\varepsilon)}\right)^2. \qquad (57)$$

La comparación de estos resultados con la ecuación [40] manifiesta, *que el empuje en el supuesto de sobrecarga se calcula de idéntico modo que en el caso de no haberla, solo que en vez de la altura simple de cohesión h, se debe tomar la h' que conviene á una sobrecarga.*

Como resultado de esta regla puede establecerse la proporción

$$D : D' = (H-h) : (H-h')$$
$$= (H-h) : (H-h+\frac{2p}{g}),$$

$$D' = \frac{H-h+\frac{2p}{g}}{H-h}\, D = \left(1+\frac{2p}{g(H-h)}\right) D. \qquad (58)$$

Así, pues, el empuje D' *producido por un terreno que se halla cubierto con sobrecarga, se calcula multiplicando por la cantidad* $1 + \frac{2p}{g(H-h)}$ *el empuje* D *de tierras de iguales condiciones, pero que no tienen sobrecarga.*

Si no hubiese cohesión, saldría $h=0$, luego

$$D' = (1+\frac{2p}{gH})\, D. \qquad (59)$$

Las ecuaciones (58) y (59) demuestran que una carga sobre tierras tiene tanto menor influjo en la presión que ejercen, cuanto mayor es la altura de las tierras.

Continuará.