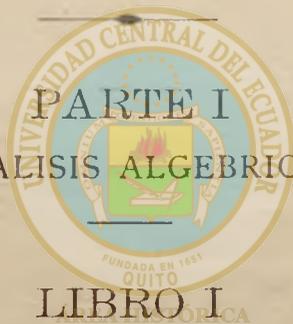

TEORÍA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD
CENTRAL DEL ECUADOR



DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES
CON RELACIÓN Á ÉL

Continuación de la página 322, número 117

De otra manera: por ser, como ya se ha dicho,

$\frac{0}{0}$

la base ó fundamento de las otras expresiones indeterminadas, ó de la cual éstas se derivan, demos una de-

mostración inmediata de las ecuaciones (i): si, de conformidad con lo indicado en el n° 36, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ son magnitudes indefinidamente decrecientes, los productos $\alpha a, \beta b, \gamma c, \dots$ decrecerán con los factores $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ hasta desaparecer, suponiendo que a, b, c, \dots sean valores constantes; luego, si λ, μ, ν, \dots decrecen de la misma manera, puede escribirse

$$\lambda = \alpha a, \mu = \beta b, \nu = \gamma c, \dots; \quad [j]$$

y así,

$$\frac{\lambda}{\alpha} = a, \frac{\mu}{\beta} = b, \frac{\nu}{\gamma} = c, \dots,$$

ó, pasando al límite,

$$\lim. \frac{\lambda}{\alpha} = a, \lim. \frac{\mu}{\beta} = b, \lim. \frac{\nu}{\gamma} = c, \dots,$$

ó

$$\frac{0}{0} = a, \frac{0}{0} = b, \frac{0}{0} = c, \dots$$

Sale además, de cualquiera de las expresiones [j], de la primera por ejemplo,

$$\frac{\lambda}{\alpha} = a; \text{ y de ésta, } \frac{\lambda}{\frac{\tau}{a}} = a;$$

por lo que, suponiendo sea τ un número infinitamente creciente, se verificará

$$\lim. \frac{\frac{\lambda}{\tau}}{\frac{a}{\tau}} = \lim. \alpha;$$

y como, por el nº 37, teor. I y la *cuestión* respectiva, es

$$\lim. \frac{\frac{\lambda}{\tau}}{\frac{a}{\tau}} = \frac{\frac{0}{\infty}}{\frac{\infty}{0}} = \frac{0}{0}; \text{ y } \lim. \alpha = 0,$$

resulta, evidentemente,



Hemos visto también en el teorema y número citados, que

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$a = \omega \alpha; \text{ por tanto, } \frac{a}{\alpha} = \omega;$$

de donde

$$\frac{\frac{a}{\tau}}{\frac{\alpha}{\tau}} = \omega;$$

por lo que, suponiéndole á τ el carácter indicado anteriormente, se verificará

$$\lim. \frac{\frac{a}{\tau}}{\frac{\alpha}{\tau}} = \lim. \omega;$$

mas, por el teorema aludido, es

$$\lim. \frac{\frac{a}{\tau}}{\frac{\alpha}{\tau}} = \frac{\frac{a}{\infty}}{\frac{0}{\infty}} = \frac{0}{0}; \text{ y } \lim. \omega = \infty;$$

luego

Por tanto,



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

L. Q. D. D.

NOTA.—Eliminando en

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}$$

el factor $x-a$ que reduce á *cero sobre cero* tal expresión, la nueva forma puede tener, por lo visto, el valor *cero* ó el *infinito* ó una *cantidad finita cualquiera*, pero sólo tendrá uno de estos valores; y de aquí el que desaparezca la indeterminación. Resulta *cero como valor determinado de la expresión*, si eliminado el factor que reduce á cero el dividendo y divisor, permanecen aún en aquél uno ó varios factores por los cuales, para $\lim. x = a$, todavía se re-

duce á cero el dividendo, pero no el divisor: la expresión tendrá entonces la forma

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{0}{A} = 0,$$

según el *teor. I*, nº 37. *Es el infinito el valor determinado del cociente* si, después de la eliminación, hay uno ó varios factores que, para $x=a$, reducen á *cero* el divisor y no el dividendo: la forma será entonces

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{A}{0} = \infty,$$

por lo enseñado en el *teor. II* del mismo nº. Finalmente, *es el cociente una cantidad finita cualquiera*, si en el dividendo y divisor desaparecen, por eliminación, los factores que reducen á *cero* uno y otro término: la forma será entonces

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{A}{B} = \text{cantidad finita.}$$

Ejemplo.—Ya sabemos que, para

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1,$$

si $\lim. x=1$, es

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{0}{0} = n.$$

2º.—La forma

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0,$$

es un *símbolo de indeterminación*, porque equivale á la forma

$$\frac{0}{0}.$$

En efecto, si los valores de $f[x]$ y $f_1[x]$ se hacen iguales á cero para un cierto valor de la variable, tendremos

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{f_1(x)} \cdot f(x),$$

ó, en el límite,

$$\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{1}{0} \cdot 0 = 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0.$$

Así, en el caso del ejemplo anterior, resulta

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) \cdot \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} (x^n - 1);$$

y, para lím. $x = 1$,

$$\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{1}{0} \cdot 0 = 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0.$$

3º—La forma

$$\infty - \infty,$$

es un *símbolo de indeterminación*, porque equivale á la forma

$$\frac{0}{0}.$$

En efecto, si para un valor de x , se hacen iguales á cero los valores de $f[x]$, $f_1[x]$, ambas expresiones serán una diferencia en que el sustraendo es igual al minuendo: será pues,

$$f[x] = \psi[x] - \phi[x].$$

Por tanto,

$$\frac{f(x)}{f_1[x]} = \frac{\psi(x) - \phi(x)}{f_1[x]} = \frac{\psi(x)}{f_1[x]} - \frac{\phi(x)}{f_1[x]},$$

y, para el valor x que reduce á cero el dividendo y divisor del primer miembro, tendremos en el límite

$$\frac{0}{0} = \frac{\psi[x]}{0} - \frac{\phi[x]}{0} = \infty - \infty,$$

según el *teor. II*, nº 37. En el ejemplo del caso 1º, para $x=1$, será

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{ó} \quad \frac{0}{0} = \frac{x^n}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty.$$

4º—La forma

$$\frac{\infty}{\infty}$$

es un *símbolo de indeterminación*, porque es igual á la forma

$$\frac{0}{0}.$$

En efecto,

$$\frac{f[x]}{f_1[x]} = \frac{\frac{1}{f_1[x]}}{\frac{1}{f[x]}}$$

y para los valores de x que reducen á cero los de $f(x)$, $f_1[x]$, será en el límite,

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{1} = \infty$$

Así,

y, si $\lim. x = 1$, resulta



5º—La forma

0º

es también un *símbolo de indeterminación*. En efecto,

$$\log. \left(\frac{f_1[x]}{f[x]} \right) = f_1[x] \times \log. f[x] = \frac{f_1[x]}{\log f(x)}$$

luego si es, para un cierto valor de x ,

$$\lim. f[x]=0, \lim. f_1[x]=0,$$

resultará en el límite,

$$\log. (0^0) = \frac{0}{1} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0} \times 1 = \frac{0}{0} \times \log. B = \log. [B^0]$$

$$\text{ó} \quad 0^0 = B^0 \quad (k)$$

en la cual se ha escrito $1 = \log. B$, siendo $B < 1$, la base de un cierto sistema de logaritmos; y $\log. f[x] = \log. 0 = \infty$ ó, con más propiedad, $\pm \infty$ según que sea la base menor ó mayor que la unidad. Ahora bien, como en la [k] puede B^0 tomar diferentes valores, por tomarlos 0 ; se sigue, que 0^0 puede tomar diferentes valores. Luego, de conformidad con lo enunciado, es 0^0 un símbolo de indeterminación.

De otra manera: si es α una magnitud que decrece indefinidamente, se verificará con un valor m constante,

$$\lim. \alpha^0 = \lim. \alpha^m = \lim. \frac{\alpha^m}{\alpha^m} = \frac{0^m}{0^m} = \frac{0}{0}$$

$$\text{ó} \quad 0^0 = \frac{0}{0}$$

luego 0^0 es un símbolo de indeterminación, por serlo $\frac{0}{0}$.

6?—La forma

$$1^\infty$$

es también un símbolo de indeterminación. En efecto, para los valores de x que hagan $\lim. f[x]=1, \lim. f_1[x]=\infty$, resulta

$$\log. f[x]^{f_1[x]} = f_1[x] \times \log. f(x) = \frac{\log. f[x]}{\frac{1}{f_1(x)}}$$

ó, por razón de los valores de x en el límite,

$$\log. 1^\infty = \frac{\log. 1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0} \times \log. B = \log. B^0,$$

ó $1^\infty = B^0;$

y como B^0 puede tomar diferentes valores, lo puede también 1^∞ . Luego, de conformidad con lo enunciado, *es 1^∞ un símbolo de indeterminación.*

De otra manera; si es τ una magnitud que crece indefinidamente, se verificará con un valor m constante,

$$\lim. 1^\tau = \lim. \left(\frac{m}{m}\right)^\tau = \lim. \frac{m^\tau}{m^\tau} = \frac{m^\infty}{m^\infty},$$

ó $1^\infty = \frac{\infty}{\infty} \text{ ó } \frac{0}{0},$

según que sea $m > 1$. Luego 1^∞ *es un símbolo de indeterminación, por serlo $\frac{\infty}{\infty}$ ó $\frac{0}{0}$.*

7º—Finalmente, el ∞^0

es un *símbolo de indeterminación.* En efecto, para los valores de x que hagan límite $f(x) = \infty$, $\lim. f_1[x] = 0$, resulta

$$\log. f[x]^{f_1[x]} = f_1[x] \times \log. f(x) = \frac{f_1(x)}{\log. f[x]}$$

ó, por razón de los valores de x en el límite,

$$\log. \infty^0 = \frac{0}{\infty} = 0 = \log. B^0,$$

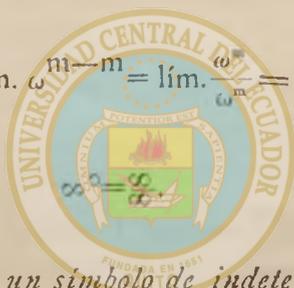
ó $\infty^0 = B^0;$

y como B^0 puede tomar diferentes valores, lo puede también ∞^0 . Luego, de conformidad con lo enunciado, es el ∞^0 un símbolo de indeterminación.

De otra manera: si es ω una magnitud que crece indefinidamente, se verificará con un valor m constante,

$$\lim. \omega^0 = \lim. \omega^{n-m} = \lim. \frac{\omega^n}{\omega^m} = \frac{\infty^n}{\infty^m}$$

ó



Luego el ∞^0 es un símbolo de indeterminación, por serlo $\frac{\infty}{\infty}$.

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

39. Ejemplos de límites.—Para la mejor inteligencia de las teorías que hemos expuesto, hallemos el límite de las expresiones siguientes:

1.^a Debe ser

$$\lim. \frac{a+\omega}{b+\omega} = 1.$$

Pues

$$\frac{a+\omega}{b+\omega} = 1 + \frac{a-b}{b+\omega};$$

luego

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{a+\omega}{b+\omega} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a-b}{b+\omega} \right) = 1;$$

porque

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{a-b}{b+\omega} = \frac{a-b}{\infty} = 0.$$

De otro modo

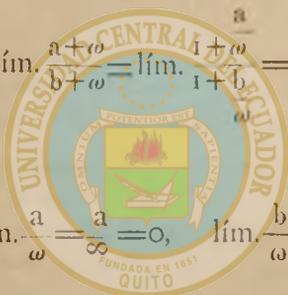
$$\frac{a+\omega}{b+\omega} = \frac{1+\frac{a}{\omega}}{1+\frac{b}{\omega}};$$

luego

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{a+\omega}{b+\omega} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{a}{\omega}}{1+\frac{b}{\omega}} = \frac{1}{1} = 1,$$

porque

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{a}{\omega} = \frac{a}{\infty} = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{b}{\omega} = \frac{b}{\infty} = 0.$$



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL (Continuará)