TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

Continuación de la página 322, número 117

De otra manera: por ser, como ya se ha dicho,

$$\frac{0}{0}$$

la base ó fundamento de las otras expresiones indeterminadas, ó de la cual éstas se derivan, demos una demostración inmediata de las ecuaciones (i): si, de conformidad con lo indicado en el nº 36, α, β, γ, ... son magnitudes indefinidamente decrecientes, los productos α a, β b, γ c, ... decrecerán con los factores α, β, γ, ... hasta desaparecer, suponiendo que a, b, c, ... sean valores constantes; luego, si λ, μ, ν, ... decrecen de la misma manera, puede escribirse

$$\lambda=\alpha\, a,\ \mu=\beta\, b,\ \nu=\gamma\, c, \ldots\ldots; \qquad [j]$$

y así,

$$\frac{\lambda}{\alpha}=a,\ \frac{\mu}{\beta}=b,\ \frac{\nu}{\gamma}=c, \ldots\ldots,$$

ó, pasando al límite,

$$\text{lím.}\ \frac{\lambda}{\alpha}=a,\ \text{lím.}\ \frac{\mu}{\beta}=b,\ \text{lím.}\ \frac{\nu}{\gamma}=c, \ldots,$$

ó

$$\frac{0}{0}=a,\ \frac{0}{0}=b,\ \frac{0}{0}=c, \ldots\ldots$$

Sale además, de cualquiera de las expresiones [j], de la primera por ejemplo,

$$\frac{\lambda}{a}=\alpha;\ \text{y de ésta,}\ \frac{\frac{\lambda}{\tau}}{\frac{a}{\tau}}=\alpha;$$

por lo que, suponiendo sea τ un número infinitamente creciente, se verificará

$$\text{lím.}\frac{\frac{\lambda}{\tau}}{\frac{a}{\tau}}=\text{lím. }\alpha;$$

y como, por el nº 37, teor. I y la *cuestión* respectiva, es

$$\text{lím. }\frac{\frac{\lambda}{\tau}}{\frac{a}{\tau}}=\frac{\frac{0}{\infty}}{\frac{a}{\infty}}=\frac{0}{0};\ \text{y lím. }\alpha=0,$$

resulta, evidentemente,

$$\frac{0}{0}=0.$$

Hemos visto también en el teorema y número citados, que

$$a=\omega\,\alpha;\ \text{por tanto, }\frac{a}{\alpha}=\omega;$$

de donde

$$\frac{\frac{a}{\tau}}{\frac{\alpha}{\tau}}=\omega;$$

por lo que, suponiéndole á τ el carácter indicado anteriormente, se verificará

$$\text{lím.}\frac{\frac{a}{\tau}}{\frac{\alpha}{\tau}}=\text{lím. }\omega;$$

mas, por el teorema aludido, es

$$\text{lím.}\frac{\frac{a}{\tau}}{\frac{\alpha}{\tau}}=\frac{\frac{a}{\infty}}{\frac{o}{\infty}}=\frac{o}{o};\ \text{y lím. }\omega=\infty\,;$$

luego

$$\frac{o}{o}=\infty.$$

Por tanto,

$$\frac{o}{o}=o,\ a,\ b,\ c,\ldots\infty.$$

L. Q. D. D.

NOTA.—Eliminando en

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}$$

el factor x—a que reduce á *cero sobre cero* tal expresión, la nueva forma puede tener, por lo visto, el valor *cero* ó el *infinito* ó una *cantidad finita cualquiera*, pero sólo tendrá úno de estos valores; y de aquí el que desaparezca la indeterminación. Resulta *cero como valor determinado de la expresión*, si eliminado el factor que reduce á cero el dividendo y divisor, permanecen aún en aquél úno ó varios factores por los cuales, para lím.x=a, todavía se reduce á cero el dividendo, pero no el divisor: la expresión tendrá entonces la forma

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}=\frac{0}{A}=0,$$

según el *teor. I, nº 37*. *Es el infinito el valor determinado del cociente* si, después de la eliminación, hay úno ó varios factores que, para $x=a$, reducen á *cero* el divisor y no el dividendo: la forma será entonces

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}=\frac{A}{0}=\infty,$$

por lo enseñado en el *teor. II* del mismo nº Finalmente, *es el cociente una cantidad finita cualquiera*, si en el dividendo y divisor desaparecen, por eliminación, los factores que reducen á cero úno y otro término: la forma será entonces

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}=\frac{A}{B}=\textit{cantidad finita.}$$

Ejemplo.—Ya sabemos que, para

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}=\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1,$$

si lím. $x=1$, es

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}=\frac{0}{0}=n.$$

2º—La forma

$$0.\infty = \infty . 0,$$

es un *símbolo de indeterminación,* porque equivale á la forma

$$\frac{0}{0}.$$

En efecto, si los valores de f [x] y f_1[x] se hacen iguales á cero para un cierto valor de la variable, tendremos

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = f(x). \frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{f_1(x)}. \ f(x),$$

ó, en el límite,

$$\frac{0}{0} = 0. \frac{1}{0} = \frac{1}{0}. \ 0 = 0. \ \infty = \infty. \ 0.$$

Así, en el caso del ejemplo anterior, resulta

$$\frac{f(x)}{f_1(1)} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = (x^n - 1). \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}(x^n - 1);$$

y, para lím. $x = 1$,

$$\frac{0}{0} = 0. \frac{1}{0} = \frac{1}{0}. \ 0 = 0. \ \infty = \infty.0.$$

3º—La forma

$$\infty - \infty,$$

es un *símlobo de indeterminación,* porque equivale á la forma

$$\frac{0}{0}.$$

En efecto, si para un valor de x, se hacen iguales á cero los valores de f [x], f_1 [x], ambas expresiones serán una diferencia en que el sustraendo es igual al minuendo: será pues,

$$f[x]=\psi[x]-\phi[x].$$

Por tanto,

$$\frac{f(x)}{f_1[x]}=\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{f_1[x]}=\frac{\psi(x)}{f_1[x]}-\frac{\varphi(x)}{f_1[x]},$$

y, para el valor x que reduce á cero el dividendo y divisor del primer miembro, tendremos en el límite

$$\frac{0}{0}=\frac{\psi[x]}{0}-\frac{\phi[x]}{0}=\infty-\infty,$$

según el *teor. II*, nº 37. En el ejemplo del caso 1º, para x=1, será

$$\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{x^n}{x-1}-\frac{1}{x-1},$$

ó

$$\frac{0}{0}=\frac{x^n}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty.$$

4º—La forma

$$\frac{\infty}{\infty}$$

es un *símbolo de indeterminación*, porque es igual á la forma

$$\frac{0}{0}.$$

En efecto,

$$\frac{f[x]}{f_1[x]}=\frac{\frac{1}{f_1[x]}}{\frac{1}{f[x]}};$$

y para los valores de x que reducen á cero los de f(x), $f_1[x]$, será en el límite,

$$\frac{0}{0}=\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Así,

$$\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x^n-1}};$$

y, si lím.$x=1$, resulta

$$\frac{0}{0}=\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}$$

5º—La forma

$$0^0$$

es también un *símbolo de indeterminación.* En efecto,

$$\log.\left(f[x]^{f_1[x]}\right)=f_1[x]\times\log.f[x]=\frac{f_1[x]}{\frac{1}{\log f(x)}};$$

luego si es, para un cierto valor de x,

$$\text{lím. } f[x]=0,\ \text{lím. } f_1[x]=0,$$

resultará en el límite,

$$\log.(0^0)=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}=\frac{0}{0}\times 1=\frac{0}{0}\times \log. B=\log.\left[B^{\frac{0}{0}}\right]$$

ó $$0^0=B^{\frac{0}{0}} \qquad (k)$$

en la cual se ha escrito $1=\log. B$, siendo $B \gtrless 1$, la base de un cierto sistema de logaritmos; y $\log. f[x]=\log. 0=\infty$ ó, con más propiedad, $\pm\infty$ según que *sea la base menor ó mayor que la unidad.* Ahora bien, como en la [k] puede $B^{\frac{0}{0}}$ tomar diferentes valores, por tomarlos $\frac{0}{0}$; se sigue, que 0^0 puede tomar diferentes valores. Luego, de conformidad con lo enunciado, *es* 0^0 *un símbolo de indeterminación.*

De otra manera: si es α una magnitud que decrece indefinidamente, se verificará con un valor m constante,

$$\text{lím. } \alpha^0=\text{lím. } \alpha^{m-m}=\text{lím. }\frac{\alpha^m}{\alpha^m}=\frac{0^m}{0^m}=\frac{0}{0}.$$

ó $$0^0=\frac{0}{0};$$

luego 0^0 *es un símbolo de indeterminación, por serlo* $\frac{0}{0}$.

62.—La forma

$$1^\infty$$

es también un *símbolo de indeterminación.* En efecto, para los valores de x que hagan *lím.* $f[x]=1$, *lím.* $f_1[x]=\infty$, resulta

$$\log. f[x]^{f_1[x]} = f_1[x] \times \log. f(x) = \frac{\log. f[x]}{\frac{1}{f_1(x)}},$$

ó, por razón de los valores de x en el límite,

$$\log. 1^{\infty} = \frac{\log. 1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0} \times \log. B = \log. B^{\frac{0}{0}},$$

ó $$1^{\infty} = B^{\frac{0}{0}};$$

y como $B^{\frac{0}{0}}$ puede tomar diferentes valores, lo puede también 1^{∞}. Luego, de conformidad con lo enunciado, *es* 1^{∞} *un símbolo de indeterminación.*

De otra manera; si es τ una magnitud que crece indefinidamente, se verificará con un valor m constante,

$$\text{lím. } 1^{\tau} = \text{lím.} \left(\frac{m}{m}\right)^{\tau} = \text{lím.} \frac{m^{\tau}}{m^{\tau}} = \frac{m^{\infty}}{m^{\infty}}.$$

ó $$1^{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ ó } = \frac{0}{0},$$

según que sea $m \gtrless 1$. Luego 1^{∞} *es un símbolo de indeterminación, por serlo* $\frac{\infty}{\infty}$ ó $\frac{0}{0}$.

7º—Finalmente, el

$$\infty^{0}$$

es un *símbolo de indeterminación.* En efecto, para los valores de x que hagan límite $f(x) = \infty$, lim. $f_1[x] = 0$, resulta

$$\log. f[x]^{f_1[x]} = f_1(x) \times \log. f(x) = \frac{f_1(x)}{\frac{1}{\log. f[x]}},$$

ó, por razón de los valores de x en el límite,

$$\log.\ \infty^{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} = \log.\ B^{\frac{0}{0}},$$

ó

$$\infty^{0} = B^{\frac{0}{0}};$$

y como $B^{\frac{0}{0}}$ puede tomar diferentes valores, lo puede también ∞^{0}. Luego, de conformidad con lo enunciado, *es el* ∞^{0} *un símbolo de indeterminación.*

De otra manera: si es ω una magnitud que crece indefinidamente, se verificará con un valor m constante,

$$\text{lím.}\ \omega^{0} = \text{lím.}\ \omega^{m-m} = \text{lím.}\frac{\omega^{m}}{\omega^{m}} = \frac{\infty^{m}}{\infty^{m}}.$$

ó

$$\infty^{0} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Luego *el* ∞^{0} *es un símbolo de indeterminación, por serlo* $\frac{\infty}{\infty}$.

39. **Ejemplos de límites.**—Para la mejor inteligencia de las teorías que hemos expuesto, hallemos el límite de las expresiones siguientes:

1.ª Debe ser

$$\text{lím.}\frac{a+\omega}{b+\omega} = 1.$$

Pues

$$\frac{a+\omega}{b+\omega} = 1 + \frac{a-b}{b+\omega};$$

luego

$$\text{lím.}\frac{a+\omega}{b+\omega}=\text{lím.}\left(1+\frac{a-b}{b+\omega}\right)=1;$$

porque

$$\text{lím.}\frac{a-b}{b+\omega}=\frac{a-b}{\infty}=0.$$

De otro modo

$$\frac{a+\omega}{b+\omega}=\frac{1+\frac{a}{\omega}}{1+\frac{b}{\omega}};$$

luego

$$\text{lím.}\frac{a+\omega}{b+\omega}=\text{lím.}\frac{1+\frac{a}{\omega}}{1+\frac{b}{\omega}}=\frac{1}{1}=1,$$

porque

$$\text{lím.}\frac{a}{\omega}=\frac{a}{\infty}=0,\qquad \text{lím.}\frac{b}{\omega}=\frac{b}{\infty}=0.$$

(Continuará)