TEORIA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

Y DE LOS MUROS DE CONTENSION Y REVESTIMIENTO.

POR JOSE KOLBERG, S. J. — Profesor en la Universidad.

(Continuación. – V. el nº 78, pág. 54)

§ 25.

Muros de contensión en carreteras comunes.

Si D representa el empuje que un muro de contensión sufre por el peso del terraplén mismo, y D' el que corresponde al aumento de la intensidad que se sigue de una carga accidental, se tendrá, por la ecuación (59),

$$D' = \left[1 + \frac{2p}{gH}\right] D. \qquad \text{(a)}$$

Por lo que toca al centro del empuje, éste se hallará á la altura

$$a' = \frac{gH+3p}{gH+2p} \cdot a, \qquad \text{(b)}$$

en donde a es la altura del centro del empuje, si no hay sobrecarga.

La solidez del muro de contensión debe ser suficiente para resistir á la mayor sobrecarga posible, que, según la esperiencia, *en carreteras* se verifica por un gentío excesivo, siendo entonces

$$p = 392 - 450 \text{ kilogr. por metro cuadrado.}$$

El peso de los materiales que se emplean en hacer el amontonamiento y terraplén, sea en término medio por metro cúbico $g = 1420^k$; resulta

$$\frac{p}{g}=0,232-0,317;$$

y sustituyendo el mayor de estos valores en [a] y (b), se tiene

$$\frac{D'}{D}=1+\frac{2.0,317}{H}=1+\frac{0,634}{H}, \qquad (\ )$$

$$\frac{a'}{a}=1+\frac{p}{gH+2p}=1+\frac{0,317}{H+0,634}.$$

Para alturas	H=**2**,	**4**,	**6**,	**8**,	**10**,	**20** met.
es	$\frac{D'}{D}$=1,317	1,158	1,105	1,079	1,063	1,032
	$\frac{a'}{a}$=1,120	1,086	1,048	1,036	1,029	1,015

En la práctica, las alturas de muros de contensión y revestimiento varían entre 2 y 20 metros; de donde se sigue que el empuje D hallado sin tomar en cuenta la sobrecarga, se debe multiplicar por números contenidos entre 1,317 y 1,032 para obtener una resistencia que sea suficiente para la máxima sobrecarga posible.

Ahora, los números por los que debe multiplicarse cada vez el empuje simple, á fin de hallar el que corresponde á una cierta sobrecarga accidental y que además produce un determinado exceso de estabilidad, se llaman *coeficientes de seguridad.* Designando *este coeficiente* por s será $s=\frac{D'}{D}$, y sus valores se hallan en la pequeña tabla indicada.

Sinembargo, como los valores allí notados sólo satisfacen al equilibrio labil, la construcción caerá por un peso algo mayor que el de la sobrecarga que hemos supuesto. Debiendo ser la estabilidad segura y suficiente para cualquier otro caso, como por ejemplo, de la humedad, lluvias &ª, el coeficiente de seguridad suele tomarse algo mayor: así s=2 para alturas de 2 metros, y s=1½ para alturas de 20 metros; y para hallar los valores intermedios, puede observarse que como los números de la tabla salen de la expresión (c), así los coeficientes de seguridad deben resultar de la función

$$S=a+\frac{b}{H} \tag{d}$$

que es más general y en donde *a* y *b* son dos cantidades constantes desconocidas. Pero teniendo dos valores especiales de s que son s=2 para H=2 y s=1½ para H=20, resulta este par de ecuaciones:

$$2=a+\frac{b}{2}, \qquad 1{,}5=a+\frac{b}{20},$$

de las cuales se siguen los valores

$$a=\frac{13}{9}=1{,}444, \qquad b=\frac{10}{9}=1{,}111;$$

así que la expresión general del coeficiente de seguridad tiene la forma

$$s=1{,}444+\frac{1{,}111}{H}. \tag{66}$$

Por ejemplo, si la altura del muro es H=6 metros, el coeficiente de seguridad tiene que ser s=1,63, ó más breve, s=1,6.

Introducido así el coeficiente de seguridad, ya no se necesita más asignar á la altura del centro de empuje *a'* valor distinto de *a*, pues no hay mucha diferencia entre *a* y *a'* en la tabla indicada, y además hecho el muro más fuerte de lo que debe ser absolutamente, podrá sostener el empuje, aunque su resultante se halle en realidad algún tanto trasladada hácia arriba. Sinembargo, cuando se quiere calcular con rigor, pueden servir los mismos números de la tabla.

§ 26.

Muros de contensión para ferrocarriles.

La carga accidental en este caso, se aprecia conforme al peso de una locomotora cuando está sobre los carriles, suponiendo que este peso se halle dispuesto con identidad de presión en todo el ancho del terraplén; si hubiese dos sistemas de carriles, el ancho crece proporcionalmente, de suerte que permace invariable el peso de la carga en cada metro cuadrado. Este peso es en término medio $p=1680^k$, y reteniendo el mismo valor para el peso específico de las tierras $g=1420^k$, resulta $\frac{p}{g}=1{,}183$; luego

$$\frac{D'}{D}=1+\frac{2p}{gH}=1+\frac{2{,}366}{H}, \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{a'}{a}=1+\frac{p}{gH+2p}=1+\frac{1{,}183}{H+2{,}366}.$$

Para $H=2$ y $H=20$ metros, resulta

$$\frac{D'}{D}=2{,}183 \text{ y } 1{,}118,$$

$$\frac{a'}{a}=1{,}27 \text{ y } 1{,}053.$$

Para tener una seguridad que sea algo mayor, se toma el coeficiente de seguridad que es $s=\frac{D'}{D}$, también con un valor algo mayor que el que se necesita absolutamente, haciendo $s=3$ para $H=2$, y $s=2$ para $H=20$. La expresión general de s,

$$s=a+\frac{b}{H},$$

suministra las dos ecuaciones especiales:

$$3=a+\frac{b}{2}, \qquad 2=a+\frac{b}{20},$$

de donde se deduce: $a=1\frac{8}{9}=1{,}888\,..$ y $b=2\frac{2}{9}=2{,}222\,..$; así que el coeficiente de seguridad se expresa por

$$s=1{,}888+\frac{2{,}222}{H}. \qquad (67)$$

Ejemplo. ¿Cual será el empuje que el muro de contensión sostiene en un ferrocarril, si la altura de aquel es 10 metros, y su paramento interior tiene un talud tang. $\varepsilon=\frac{1}{10}$, suponiendo que los materiales de construcción sean tierras vegetales de un peso de 1300 kilogramos por metro cúbico en estado movedizo y que el talud natural sea tang $\alpha=1{,}2$?

Resolución. Atendiendo á la humedad que la lluvia puede producir en el terraplén, auméntese de 80 kilogramos el peso (§ 24), peniendo g=1330+80=1510 kilogramos.

La tabla IV suministra

$$\text{para tang}\,\alpha=1{,}2 \text{ y tang}\,\varepsilon=\tfrac{1}{10}:\frac{w}{g}=0{,}184,$$

$$\text{por donde } w=0{,}184\,g=0{,}184\,.\,1410=259{,}4.$$

Aplicando la tabla II, es $\dfrac{1}{\cos\varepsilon}=1{,}005$; luego

$$D=\tfrac{1}{2}w\frac{H^2}{\cos\varepsilon}=\tfrac{1}{2}.259{,}4.100.1{,}005=13035 \text{ kilogr.}$$

Finalmente conforme á (67), el coeficiente de seguridad es

$$s=1{,}888+\frac{2{,}222}{10}=2{,}111,$$

y de consiguiente, el empuje pedido

$$D'=s.D=27517 \text{ kilogramos}=27{,}5 \text{ toneladas.}$$

ARTÍCULO IV.

EMPUJE DE TIERRAS QUE DESDE LA CIMA DEL MURO ASCIEDEN SEGÚN UN PLANO CUALQUIERA.

§ 27.

Magnitud de este empuje.

No tomando más en consideración la cohesión de la masa y tampoco, como en el artículo anterior, el roce entre la masa y la pared, en vez de la ecuación (14) tendremos esta otra más sencilla,

$$D=\max\frac{X\,\text{sen}\,\varphi}{\cos(\varepsilon+\varphi)}, \qquad (68)$$

en donde X es el peso del prisma que se separa de las demás tierras, ε el ángulo formado por la vertical y el paramento interior del muro, y φ el ángulo entre el plano de rotura y el talud natural.

Supongamos que la superficie FM de las tierras [fig. 34] forme un ángulo δ con el talud natural FJ', y sea AFE el prisma del máximo empuje. Será.

$$X = g. \triangle AFE, \text{ y como}$$

$$\triangle AFE = \tfrac{1}{2} AF . AE \operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi),$$

$$AF = \frac{H}{\cos\varepsilon}, \quad AE = AF \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(\delta+\varphi)} = H \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta-\varepsilon)}{\cos\varepsilon \operatorname{sen}(\delta+\varphi)};$$

se hallará $\triangle AFE = \frac{1}{2} \frac{H^2}{\cos^2\varepsilon} . \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta-\varepsilon) \operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\operatorname{sen}(\delta+\varphi)};$

luego $\quad X = \frac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos^2\varepsilon} . \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta-\varepsilon) \operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\operatorname{sen}(\delta+\varphi)},$

$$D = \max \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos^2\varepsilon} . \operatorname{sen}(\alpha+\delta-\varepsilon) \frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\operatorname{sen}(\delta+\varphi) \cos(\varepsilon+\varphi)} \tag{69}$$

Sólo es variable el último factor

$$F(\varphi) = \frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\operatorname{sen}(\delta+\varphi) \cos(\varepsilon+\varphi)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\varphi [\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon) \cos\varphi - \cos(\alpha-\varepsilon) \operatorname{sen}\varphi]}{(\operatorname{sen}\delta \cos\varphi + \cos\delta \operatorname{sen}\varphi)(\cos\varepsilon \cos\varphi - \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}\varphi)},$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\varepsilon)}{\operatorname{sen}\varepsilon \cos\delta} . \frac{\operatorname{tang}\varphi [\operatorname{tang}(\alpha-\varepsilon) - \operatorname{tang}\varphi]}{(\operatorname{tang}\delta + \operatorname{tang}\varphi)(\operatorname{cotg}\varepsilon - \operatorname{tang}\varphi)}$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\varepsilon)}{\operatorname{sen}\varepsilon \cos\delta} . \frac{x(a-x)}{(b+x)(c-x)},$$

si por brevedad se pone

$$\operatorname{tang}\varphi = x, \quad \operatorname{tang}(\alpha-\varepsilon) = a, \quad \operatorname{tang}\delta = b, \quad \operatorname{cotg}\varepsilon = c; \tag{a}$$

por donde bajo otra forma es

$$D = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos^2\varepsilon} . \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta-\varepsilon) \cos(\alpha-\varepsilon)}{\operatorname{sen}\varepsilon \cos\delta} . \frac{x(a-x)}{(b+x)(c-x)} . \tag{b}$$

D será un máximo según lo sea la función

$$u = \frac{x(a-x)}{(b+x)(c-x)} = \frac{ax-x^2}{bc+(c-b)x-x^2};$$

lo que exige que sea $\frac{du}{dx}=0$; pero

$$\frac{du}{dx} = \frac{abc-2bcx-(c-a-b)x^2}{[bc+(c-b)x-x^2]^2};$$

luego debe ser igual á cero el numerador, y así es

$$(c-a-b)\,x^2+2bcx-abc=0,$$

resultando

$$x = \frac{-bc \pm \sqrt{b^2\,c^2+abc\,(c-a-b)}}{(c-a-b)}.$$

De los dos signos de la raíz, evidentemente se debe elegir el positivo, puesto que x=tang φ es positivo. Luego se tiene

$$x = \text{tang}\ \varphi = \text{tang}\ \gamma = \frac{-bc+\sqrt{b^2\,c^2+abc(c-a-b)}}{(c-a-b)}$$

$$= \frac{-bc+\sqrt{bc\,(a+b)\,(c-a)}}{(c-a-b)}$$

$$= \frac{\sqrt{bc}}{(c-a-b)}\left[-\sqrt{bc}+\sqrt{(a+b)\,(c-a)}\right]. \qquad (70)$$

Con esta relación se conoce el ángulo $\varphi=\gamma$ entre el plano de rotura y el talud natural.

Para hallar el valor del empuje D, nos sirve la ecuación (b), efectuando las sustituciones convenientes, que son:

$$x = \frac{\sqrt{bc}}{(c-a-b)}\left[\sqrt{(a+b)(c-a)}-\sqrt{bc}\right],$$

$$a-x = \frac{\sqrt{(a+b)\,(c-a)}}{(c-a-b)}\left[\sqrt{(a+b)\,(c-a)}-\sqrt{bc}\right],$$

$$b+x = \frac{\sqrt{b\,(a+b)}}{(c-a-b)}\left[\sqrt{c(c-a)}-\sqrt{b\,(a+b)}\right],$$

$$c-x = \frac{\sqrt{c\,(c-a)}}{(c-a-b)}\left[\sqrt{c(c-a)}-\sqrt{b\,(a+b)}\right];$$

á las cuales se da esta forma, reduciendo $a-x$, $b+x$, $c-x$ á quebrados con el denominador $(c-a-b)$, y después, (teniendo en cuenta que $(c-a-b)$ será factor del primer término del numerador,) sirviéndose de la relación

$$(c-a-b)=\frac{1}{a}\left(\sqrt{(a+b)(c-a)}-\sqrt{bc}\right)\left(\sqrt{(a+b)(c-a)}+\sqrt{bc}\right).$$

Se obtiene

$$\frac{x(a-x)}{(b+x)(c-x)}=\left(\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)}-\sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)}-\sqrt{b(a+b)}}\right)^2. \qquad (c)$$

Además en la ecuación (b) es

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta-\varepsilon)\cos(\alpha-\varepsilon)}{\operatorname{sen}\varepsilon\cos\varepsilon\cos\delta}$$

$$=\frac{[\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon)\cos\delta+\cos(\alpha-\varepsilon)\operatorname{sen}\delta]\cos(\alpha-\varepsilon)}{\operatorname{sen}\varepsilon\cos\varepsilon\cos\delta}$$

$$=\frac{\cos^2(\alpha-\varepsilon)[\operatorname{tang}(\alpha-\varepsilon)+\operatorname{tang}\delta]}{\operatorname{sen}\varepsilon\cos\varepsilon}$$

$$=\frac{\operatorname{tang}(\alpha-\varepsilon)+\operatorname{tang}\delta}{1+\operatorname{tang}^2(\alpha-\varepsilon)}\cdot\frac{1+\operatorname{cotg}^2\varepsilon}{\operatorname{cotg}\varepsilon}$$

$$=\frac{(a+b)(1+c^2)}{c(1+a^2)}. \qquad (d)$$

Por esta sustitución y la anterior (c), la ecuación (b) del empuje actual sobre el muro toma la forma

$$D=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{(a+b)(1+c^2)}{c(1+a^2)}\left(\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)}-\sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)}-\sqrt{b(a+b)}}\right). \qquad (71)$$

Si se pone

$$\frac{w}{g}=\frac{(a+b)(1+c^2)}{c(1+a^2)}\left[\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)}-\sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)}-\sqrt{b(a+b)}}\right]^2, \qquad (72)$$

se convierte la ecuación (71) en

$$D=\tfrac{1}{2}w\frac{H^2}{\cos\varepsilon}, \qquad (73)$$

expresión que se traduce: *el empuje equivale á la presión de un líquido que tiene por peso específico la cantidad* w *que puede calcularse mediante la ecuación* (72). Luego, pudiéndose sustituir un líquido en vez de las tierras, *el centro de empuje se halará en la altura* $a=\frac{1}{3}H$.

El valor de D en (71) es verdaderamente un máximo, porque la expresión de D que está en (69) es dos veces $=0$, á saber, para $\varphi=0$ y $\varphi=\alpha-\varepsilon$, cuando el plano de rotura se supone idéntico al talud natural ó al paramento interior del muro. Entre estos valores iguales á cero, debe haber positivos y consiguientemente un máximo que corresponda á un valor positivo de φ y tang φ.

En la práctica son dadas las cantidades tang α, tang ε, y además tang α', en donde α' es el ángulo del talud que tiene la superficie de las tierras, de manera que es tang δ=tang $(\alpha'-\alpha)$. Luego para el cálculo deben efectuarse las sustituciones siguientes:

$$\text{I} \qquad a=\operatorname{tang}(\alpha-\varepsilon)=\frac{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\varepsilon}{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\varepsilon},$$

$$\text{II} \qquad b=\operatorname{tang}\delta=\operatorname{tang}(\alpha'-\alpha)=\frac{\operatorname{tang}\alpha'-\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}\alpha'\operatorname{tang}\alpha},$$

$$\text{III} \qquad c=\operatorname{cotg}\varepsilon=\frac{1}{\operatorname{tang}\varepsilon}.$$

Con estos valores se calculará $\frac{w}{g}$ mediante la ecuación (72), y finalmente D por la (73). Cuando se quiere determinar también el ángulo γ de rotura, éste se hallará por (70).

Ejemplo; tang $\alpha=1,2$; tang $\varepsilon=\frac{1}{4}$; tang $\alpha'=4\frac{1}{4}$; $H=10^m$ $g=1400^k$.
Se sigue en primer lugar que

$$a=\frac{1,2-\frac{1}{4}}{1+1,2.\frac{1}{4}}=\frac{4,8-1}{4+1,2}=\frac{3,8}{5,2}=\frac{19}{26},$$

$$b=\frac{4\frac{1}{4}-1,2}{1+4\frac{1}{4}.1,2}=\frac{17-4,8}{4+17.1,2}=\frac{12,2}{24,2}=\frac{1}{2},$$

$$c=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4,$$

$$\frac{w}{g}=\frac{1088}{1037}\left(\frac{\sqrt{85}-6,5}{\sqrt{85}-2}\right)^2=0,148;\ w=0,148.1400=207,2^k,$$

$D=\frac{1}{2}.207,2.100.1,0308=10679$ kilogramos$=10,68$ toneladas,

$$\operatorname{tang}\gamma=\frac{\sqrt{85}-6,5}{9}=0,302.$$

Si la superficie del terreno es horizontal, será $\delta=90°-\alpha$, $\operatorname{tang}\delta=\operatorname{tang}(90°-\alpha)=\operatorname{cotg}\alpha$; luego en este caso se tiene

$$a=\operatorname{tang}(\alpha-\varepsilon),\ b=\operatorname{cotg}\alpha,\ c=\operatorname{cotg}\varepsilon.$$

Sustitúyanse estos valores en (70) y (72); la reducción de las expresiones que así salen, suministra las relaciones conocidas

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tang}\gamma=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)\\ \gamma=\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)\end{array}\right\} \quad \frac{w}{g}=\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right)^2,$$

conforme á (35) y (42) del artículo anterior que trata del empuje producido por tierras que tienen una superficie horizontal.

Sería más sencillo el cálculo si hubiese tablas de los diferentes valores de $\frac{w}{g}$, como teníamos en el último artículo; no las hay, puesto que entrando en la fórmula (72) tres variables α, ε, δ, se deberían calcular tantas tablas cuantos valores se den á δ; luego por lo menos 10 distintas tablas. Una de ellas es la tabla IV que sirve para una superficie horizontal que se consigue haciendo $\delta=90°-\alpha$.

El artículo anterior es un caso especial de este párrafo; pondremos á continuación otros casos semejantes tales cuales ocurren en la práctica con mayor frecuencia.

Continuará.