TEORIA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

Y DE LOS MUROS DE CONTENCION Y REVESTIMIENTO.

POR JOSE KOLBERG, S. J. — Profesor en la Universidad.

(Continuación. – V. el nº 79, pág. 148)

§ 28

Empuje de tierras que desde la cima del muro ascienden según el talud natural.

Este caso se ofrece muchísimas veces cuando se traza un camino ó ferrocarril por las faldas de una montaña.

Se aplica la teoría del último párrafo para $\delta=0$, por cuya sustitución se deduce $b=\text{tang}\ \delta=0$. Este valor introducido en la ecuación [70], da directamente

$$\text{tang}\ \varphi=\text{tang}\ \gamma=0;\ \varphi=\gamma=0, \tag{74}$$

de suerte que el plano del talud natural que pasa por el pie del muro es igualmente el plano de rotura. Además para $b=0$, la ecuación (72) se convierte en

$$\frac{w}{g}=\frac{a^2\ (1+c^2\ )}{c^2\ (1+a^2\ )}=\frac{\text{tang}^2\ (\alpha-\varepsilon)(1+\text{cotg}^2\ \varepsilon)}{\text{cotg}^2\ \varepsilon\ [1+\text{tang}^2\ (\alpha-\varepsilon)]},$$

ó bien, después de haber sido simplificada

$$\frac{w}{g}=\left(\frac{\text{sen}\ (\alpha-\varepsilon)}{\cos\ \varepsilon}\right)^2=\frac{(\text{tang}\ \alpha-\text{tang}\ \varepsilon)^2}{1+\text{tang}^2\ \alpha}, \tag{75}$$

resultando además

$$D=\tfrac{1}{2}w\frac{H^2}{\cos\varepsilon}=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\varepsilon}\right)^2. \tag{76}$$

Para una pared vertical se tiene $\varepsilon=0$ y

$$\frac{w}{g}=\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha};\ D=\tfrac{1}{2}wH^2. \tag{77}$$

Las mismas ecuaciones pueden deducirse directamente de esta manera. Si [fig. 35] FJ' paralela á AJ es el talud natural, según el cual asciende el terreno, el prisma AFK tiene por expresión

$$\triangle AFK=\tfrac{1}{2}AF.AK \operatorname{sen} FAK$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{H}{\cos\varepsilon}.AF.\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon)\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{H^2}{\cos^2\varepsilon}.\frac{\operatorname{sen}[\alpha-\varepsilon]\operatorname{sen}[\alpha-\varepsilon-\varphi]}{\operatorname{sen}\varphi};$$

luego será

$$X=g.\triangle AFK=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos^2\varepsilon}.\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon)\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi},$$

y aplicando la fórmula general del empuje (68)

$$D=\max\frac{X\operatorname{sen}\varphi}{\cos(\varepsilon+\varphi)},$$

se infiere que el empuje del prisma AFK es

$$D=\tfrac{1}{2}gH^2.\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon)}{\cos^2\varepsilon}.\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\cos(\varepsilon+\varphi)}, \tag{a}$$

debiendo buscarse el máximo de esta expresión. Como este depende solamente del factor

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\cos(\varepsilon+\varphi)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos(\varepsilon+\varphi)-\cos\alpha\operatorname{sen}(\varepsilon+\varphi)}{\cos(\varepsilon+\varphi)}$$

$$=\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha\operatorname{tang}[\varepsilon+\varphi], \tag{b}$$

será D un máximo, según lo sea esta última expresión, lo que se verifica cuando tang $[\varepsilon+\varphi]$ es un mínimo, ó bien si lo es $\varepsilon+\varphi$ Pero φ no puede variar sino entre los límites $\varphi=\alpha-\varepsilon$ y $\varphi=0$, luego será $\varepsilon+\varphi$ un mínimo para $\varphi=0$, y haciendo $\varphi=0$ en la ecuación [a], se hallará el máximo de D ó sea el empuje actual

$$D = \frac{1}{2}\, g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}\,(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \right)^2 \qquad (c)$$

lo que corresponde perfectamente á las ecuaciones (75) y (76) ya halladas.

TABLA VII.

	tang ε, para el paramento interior.							
tang α para el talud natural.	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
1,0	0,500	0,420	0,405	0,395	0,383	0,347	0,320	0,281
1,1	0,548	0,468	0,452	0,442	0,430	0,394	0,367	0,327
1,2	0,590	0,511	0,496	0,486	0,474	0,438	0,416	0,370
1,3	0,628	0,550	0,535	0,525	0,513	0,478	0,450	0,410
1,4	0,662	0,586	0,571	0,561	0,549	0,514	0,486	0,447
1,5	0,692	0,618	0,603	0,594	0,582	0,547	0,520	0,481
1,6	0,719	0,646	0,632	0,623	0,611	0,577	0,551	0,512
1,7	0,743	0,672	0,658	0,649	0,638	0,604	0,578	0,540
1,8	0,764	0,695	0,682	0,673	0,662	0,629	0,604	0,567
1,9	0,783	0,716	0,703	0,694	0,683	0,652	0,627	0,591
2,0	0,800	0,735	0,722	0,714	0,703	0,672	0,648	0,613
2,1	0,815	0,752	0,739	0,731	0,721	0,691	0,667	0,633

Ejemplo. Se debe calcular el empuje contra una pared inclinada, suponiendo que la superficie del terreno ascienda según el talud natural, despreciándose el roce á lo largo del muro y la cohesión, y conociéndose además: la altura del muro $H=10$ metros, la inclinación del muro tang $\varepsilon = \frac{1}{6}$, el peso de las tierras por metro cúbico $g = 1510^k$ y el talud natural tang $\alpha = 1,27$

Según la tabla anterior es

para tang $\alpha = 1,2$ y tang $\varepsilon = \frac{1}{6}$ .... $\frac{w}{g} = 0,438$

para tang $\alpha = 1,3$ y tang $\varepsilon = \frac{1}{6}$ .... $\frac{w}{g} = 0,478$

Difer. $= 0,1$ .... $0,040,$

$$0,1 : 0,040 = [1,27 - 1,20] : x$$

$$x = 0,028 ; \ \frac{w}{g} = 0,438 + x = 0,466,$$

$$w = 0,466\ g = 0,466 . 1510 = 703,66^{k},$$

$$D = \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = \tfrac{1}{2} . 703,66 . 100 . 1,0138 = 35670^{k} = 35,67 \text{ toneladas}$$

Representación gráfica. Supuesto que FJ′ y AJ tengan la dirección del talud natural [fig. 36], hágase FC perpendicular á AJ, $\sphericalangle$ CFD$=\varepsilon$, FM$=$FD, y tírese AM; el $\triangle$ AFM expresará el empuje, es decir que será el empuje D$=g . \triangle$ AFM.

Pues se tiene

$$AF = \frac{H}{\cos \varepsilon} ; \ CF = AF \operatorname{sen} [\alpha - \varepsilon] = \frac{H \operatorname{sen} [\alpha - \varepsilon]}{\cos \varepsilon},$$

$$FM = FD = \frac{FC}{\cos \varepsilon} = \frac{H \operatorname{sen} [\alpha - \varepsilon]}{\cos^2 \varepsilon},$$

$$\triangle AFM = \tfrac{1}{2} FC . FM = \tfrac{1}{2} H^2 \frac{\operatorname{sen}^2 [\alpha - \varepsilon]}{\cos^3 \varepsilon} .$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Peso del prisma}\\ \text{AFM}\end{array}\right\} = g . \triangle AFM = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\operatorname{sen} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \right]^2 ,$$

lo cual es el empuje, en nuestro caso, según (76).

Influjo, que la dirección del muro tiene en la magnitud del empuje. Si suponemos muros de distinta inclinación y de *idéntica altura*, el empuje será en cualquier caso tanto mayor cuanto es menor el ángulo ε comprendido entre la vertical y el paramento interior del muro, por lo menos cuando la superficie de las tierras es un plano horizontal ó inclinado de cualquier modo hacia arriba. Luego los muros verticales sufren más que otros inclinados hacia el centro de la masa, y sufren menos que los que están inclinados en sentido contrario.

Si las tierras que necesitan un muro de revestimiento, tienen un declive según el talud natural, se las puede sostener en el mismo punto A (fig. 37) ya por muros verticales AF′, ya por inclinados AF, que tienen *distinta altura.* En este caso conviene saber que *los muros verticales sufren menor empuje que cualquiera otros inclinados.*

Si el talud natural de la superficie se prolonga hasta encontrar la horizontal del pie del muro en C, y se tira AN$=$P perpendicular aquella recta, se tendrá

$$H=AB=AF\cos\varepsilon;\quad AF=\frac{P}{\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon)};\ \text{luego}\ H=P\frac{\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon)},$$

con lo cual tenemos la altura H como función del perpendículo P. El empuje mismo es:

$$D=\tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\varepsilon}\right]^2=\tfrac{1}{2}g\frac{P^2}{\cos\varepsilon}, \tag{78}$$

expresión muy acomodada para hallar el empuje prácticamente. Como para un mismo talud, P es cantidad constante, se infiere que la mínima presión D tiene lugar cuando cos ε tiene su valor máximo cos $\varepsilon=1$, es decir en el caso de paredes verticales.

Además, se sigue que estando un muro inclinado, el empuje será idéntico, ya sea ε positivo ó negativo, con tal que sea tan solo numéricamente lo mismo (fig. 38).

§ 29.

Empuje para una superficie plana del terreno é inclinada de cualquier modo, siendo vertical el paramento interior del muro.

Se emplean las ecuaciones (70) hasta (73) del § 27 para $\varepsilon=0$, luego $c=\cot\varepsilon=\infty$.

En primer lugar, la fórmula (70) puede escribirse bajo la forma siguiente:

$$\tan\varphi=\tan\gamma=\frac{\sqrt{bc}}{c-a-b}\left[\sqrt{(a+b)(c-a)}-\sqrt{bc}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{b}}{1-\frac{a+b}{c}}\left[\sqrt{(a+b)\left(1-\frac{a}{c}\right)}-\sqrt{b}\right].$$

Haciendo $c=\infty$ se saca

$$\tan\gamma=\sqrt{b}\left[\sqrt{(a+b)}-\sqrt{b}\right],$$

y como

$$a=\tan\alpha;\qquad b=\tan\delta$$

el ángulo γ de rotura se hallará por la relación:

$$\tan\gamma=\sqrt{\tan\delta}\left[\sqrt{\tan\alpha+\tan\delta}-\sqrt{\tan\delta}\right]. \tag{79}$$

La expresión para $\frac{w}{g}$ se transforma así:

$$\frac{w}{g}=\frac{(a+b)\,(1+c^2)}{c\,(1+a^2)}\left[\frac{\sqrt{(a+b)\,(c-a)}-\sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)}-\sqrt{b(a+b)}}\right]^2$$

$$=\frac{(a+b)(\frac{1}{c^2}+1)}{\frac{1}{c}(1+a^2)}\left(\frac{\sqrt{(a+b)\,(1-\frac{a}{c})}-\sqrt{b}}{\sqrt{(c-a)}-\sqrt{\frac{b(a+b)}{c}}}\right)^2$$

$$=\frac{(a+b)(\frac{1}{c^2}+1)}{(1+a^2)}\left(\frac{\sqrt{(a+b)(1-\frac{a}{c})}-\sqrt{b}}{\sqrt{1-\frac{a}{c}}-\frac{\sqrt{b(a+b)}}{c}}\right)^2 .$$

Si $c=\infty$, resulta

$$\frac{w}{g}=\frac{a+b}{1+a^2}\left[\sqrt{a+b}-\sqrt{b}\right]^2$$

$$\frac{w}{g}=\frac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\delta}{1+\text{tang}^2\,\alpha}\left[\sqrt{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\delta}-\sqrt{\text{tang}\,\delta}\right]^2 \quad (30)$$

Finalmente es

$$D=\tfrac{1}{2}w\frac{H^2}{\cos 0}=\tfrac{1}{2}\,w\,H^2 . \quad (31)$$

No es difícil hallar las mismas ecuaciones directamente por un procedimiento semejante al del § 27.

El cálculo práctico se facilita aplicando la tabla VIII de la página siguiente, en donde se hallan los valores de $\frac{w}{g}$ para varias combinaciones de tang δ y tang α. Entre los que corresponden á tang $\delta=0$ y tang $\delta=0{,}1$ hay grandísima diferencia, mudándose el empuje mucho, si δ es pequeño. Luego cuando la superficie del terreno difiere poco del talud natural, conviene medir á α' ó δ con grande exactitud y calcular según el § 27, ó mas bien se tomará con mayor seguridad $\delta=0$, pues no se conoce tan exactamente la magnitud del ángulo α que indica el talud natural.

Ejemplo. Para tang $\alpha=1{,}2$; tang $\delta=0{,}5$; $g=1500^k$ y $H=10^m$, se sigue $\frac{w}{g}=0{,}248$; $w=0{,}248.1500=372^k$; luego

$D=\frac{1}{2}.372.100=18600$ kilogramos $=18{,}6$ toneladas.

TABLA VIII.

Talud natural tang α.	Valores de tang δ: 0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,0	0,500	0,295	0,252	0,228	0,212	0,201	0,192	0,186	0,180	0,175	0,172
1,1	0,548	0,330	0,282	0,256	0,238	0,225	0,216	0,208	0,201	0,196	
1,2	0,590	0,362	0,311	0,282	0,262	0,248	0,237	0,229	0,222		
1,3	0,628	0,391	0.337	0,306	0,285	0,269	0,258	0,248			
1,4	0,602	0,418	0,361	0,328	0.306	0,289	0,276	0,266			
1,5	0,692	0,443	0,384	0.349	0,325	0,307	0,294				
1,6	0,719	0,466	0,404	0,368	0,343	0,325	0,310				
1,7	0,743	0,487	0,424	0.386	0,360	0,341					
1,8	0,764	0,506	0,441	0,402	0,375	0,355					
1,9	0,783	0,523	0,457	0,418	0,390	9,369					
2,0	0,800	0,539	0,472	0,432	0,403	0,382					
2,1	0.815	0,554	0.486	0.4[illegible]5	0.416						

α talud natural

α' talud de la super[ficie]

$$\text{tang } \delta = \text{tang } (\alpha' - \alpha)$$

$$= \frac{\text{tg } \alpha' - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg}\alpha' \text{ tg}\alpha}$$

$$D = \tfrac{1}{2} w H^2$$

§ 30.

Comparación de los diferentes valores que el empuje tiene, si las superficies de la tierra están de diferente manera inclinada.

A. *Si la pared está derecha* puede suponerse:

I. Que el terreno ascienda por el talud natural tang α=1,2 (tang δ=0). Según la última tabla es:

$$\frac{w}{g} = 0{,}590.$$

II. Que el terreno ascienda ménos rápidamente, siendo tang α'=2 tang α y tang α=1,2. Se sigue:

$$\frac{w}{g} = 0{,}280.$$

III. Que la superficie de las tierras sea horizontal, luego tang α=1,2 y tang δ=cotg α=[illegible]. Será:

$$\frac{w}{g}=0{,}219.$$

IV. Que la superficie de las tierras descienda hácia abajo según el talud tang $\alpha'=2$ tang α, en donde tang $\alpha=1{,}2$ verificándose relaciones semejantes á las del caso II. Resulta por la fórmula (80)

$$\frac{w}{g}=0{,}186.$$

V. Que la superficie descienda por el talud natural tang $\alpha=1{,}2$. Será:

$$\frac{w}{g}=0{,}162.$$

Para muros de igual altura, se tienen los empujes como los diferentes valores de w; luego, en estos distintos casos, los empujes serán como los números

	(I)		(II)		(III)		(IV)		(V)		
	590	:	280	:	219	:	186	:	162	ó también	(a)
como	2,69	:	1,28	:	1	:	0,85	:	0,74		(a')

B. *Si la pared está inclinada* hácia las tierras, siendo el talud de aquella tang $\varepsilon=1/6$. Por lo demás, siendo la disposición del terreno la misma que en los casos anteriores, se tiene

	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
$\frac{w}{g}=$	0,438;	0,201;	0,161;	0,140;	0,127.

Como $D=\frac{1}{2}w\frac{H^2}{\cos\varepsilon}$, los empujes para muros de igual altura é inclinación serán como los valores de w, luego como los números

	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)		
	438	201	161	140	127	ó bien	(b)
como	2,72	1,25	1	0,87	0,79		(b')

Entre estos números hay la misma relación que entre los de la serie (a). Así las series (a') y (b') representan el influjo que la dirección de la superficie tiene en la magnitud relativa del empuje. Tomando, además, en cuenta la inclinación del muro, los números de la serie (b), se habrán de multiplicar además por $\frac{1}{\cos\varepsilon}=1{,}0138$, por donde sale en vez de (b)

(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	
444	204	163	142	129	(c)

Comparados estos números con los de (a) dan el efecto que produce á la vez la inclinación del terreno y do la pared. Tomando por unidad el empuje que corresponde á una superficie horizontal y pared derecha, los mismos números deberán dividirse por 219, resultando las dos series

	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	
A.	2,69	1,28	1	0,85	0,74	(a′)
B.	2,03	0,93	0,74	0,65	0,59	(b″)

Si cada uno de los números de la última serie se divide por el correspondiente que está por encima en la serie (A), resultará lo que se obtiene por la inclinación sola de la pared en los diferentes casos; pues siendo siempre 1 el empuje contra el muro vertical, los empujes contra el inclinado se expresarán por

(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
0,75	0,73	0,74	0,76	0,80.

Luego construyendo el muro con un talud interior tang $\varepsilon = \frac{1}{6}$, se logran 27 hasta 25 tantos por ciento en los casos comunes, cuando el terreno es horizontal ó va en ascenso.

Nota. *Coeficiente de seguridad para los diferentes casos de este Artículo.* Estos diferentes casos, de que acabamos de tratar, se aplican generalmente en las faldas de montañas y en otras semejantes circunstancias, cuando se debe cortar por un tei reno elevado para hacer una carretera ó ferrocarril. No siendo entonces necesario tomar en cuenta una sobrecarga accidental, bastará hacer el coeficiente de seguridad $s = 1\frac{1}{4}$. Además, el empuje D se calculará bajo la hipótesis de materiales movedizos y sin cohesión.

Continuará.