

TEORIA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

Y DE LOS MUROS DE CONTENCION Y REVESTIMIENTO,

POR JOSE KOLBERG, S. J. — Profesor en la Universidad.

(Continuación. — V. el n.º 80, pág. 263)



CÁLCULO GRÁFICO Ó MÉTODO GRAFO-ESTÁTICO

§ 31.

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL
Teorema fundamental.

Ya se ha visto en el § 27 del Artículo IV, como las fórmulas del empuje se complican, aunque al parecer sean muy sencillos los problemas. Esta complicación de las fórmulas es mucho mayor en otros casos, de manera que su aplicación encuentra grandes dificultades en el cálculo, y además es imposible resolver muchos problemas por ser irresolubles las ecuaciones

que se siguen de la condición $\frac{dD}{d\varphi} = 0$, necesaria en la hipótesis de un máximo del empuje. El cálculo gráfico, que es la resolución por medio de la construcción geométrica, es mucho más sencillo y conduce pronto al fin que se pretende, si bien tampoco puede dar fórmulas generales para todo caso posible, sino solamente resoluciones especiales.

El método gráfico tiene por fundamento un teorema general que se demuestra por el cálculo superior.

Sea AF la pared (fig. 39), AJ el talud natural, FKJ la su-

perficie del terreno y de cualquiera forma, y finalmente sea FAK un prisma de la masa. El pié A del muro puede servir de polo de un sistema de coordenadas polares, la recta AK=S que presenta la fractura, se puede tomar por radio vector, y finalmente si el talud natural AJ se supone ser eje polar, será el ángulo JAK= φ el ángulo polar. Un movimiento angular del radio vector AK=S describirá la recta ó curva JKF que es el perfil de la superficie.

En esta suposición se habrá de determinar el valor máximo de la expresión general del empuje

$$D = \frac{X \operatorname{sen} \varphi}{\cos (\varphi + \varepsilon)}, \quad (a)$$

que corresponde al caso en que se desprecia la cohesión. A este fin bastará hallar una expresión de φ que satisfaga á la condición $\frac{dD}{d\varphi} = 0$.

La diferenciación de (a) ó, lo que es lo mismo, de la ecuación

$$D \cos (\varphi + \varepsilon) = X \operatorname{sen} \varphi, \quad (1)$$

da el resultado

$$-D \operatorname{sen} (\varphi + \varepsilon) + \frac{dD}{d\varphi} \cos (\varphi + \varepsilon) = X \cos \varphi + \frac{dX}{d\varphi} \operatorname{sen} \varphi.$$

Para el caso del máximo debe ser $\frac{dD}{d\varphi} = 0$, luego se tiene

$$X \cos \varphi + D \operatorname{sen} (\varphi + \varepsilon) + \frac{dX}{d\varphi} \operatorname{sen} \varphi = 0'$$

y cuando para D se sustituye su valor que está en (a), resulta

$$X \left(\cos \varphi + \frac{\operatorname{sen} (\varphi + \varepsilon) \operatorname{sen} \varphi}{\cos (\varphi + \varepsilon)} \right) + \frac{dX}{d\varphi} \operatorname{sen} \varphi = 0,$$

$$X \cos \varepsilon + \frac{dX}{d\varphi} \operatorname{sen} \varphi \cos (\varphi + \varepsilon) = 0' \quad (c)$$

Ahora en la fig. 39 es

$$X = g \cdot \Delta AFK$$

$$dX = -g \cdot \Delta AK'K = -\frac{1}{2} g \cdot AK \cdot AK' \operatorname{sen} K'AK.$$

Se debe dar á dX el signo negativo porque X decrece cuando φ aumenta. Como entre AK y AK' hay solamente una diferencia infinitamente pequeña, se puede escribir $AK' = AK = S$ y además en el límite es $\text{sen } K'AK = \text{arco } K'AK = d\varphi$; luego sale

$$dX = -\frac{1}{2} g S^2 d\varphi; \quad \frac{dX}{d\varphi} = -\frac{1}{2} g S^2. \quad (c)$$

Sustituido este valor en (c) resulta que

$$X \cos \varepsilon - \frac{1}{2} g S^2 \text{sen } \varphi \cos (\varphi + \varepsilon) = 0,$$

luego
$$X = \frac{1}{2} g S^2 \frac{\text{sen } \varphi \cos (\varphi + \varepsilon)}{\cos \varepsilon}, \quad (e)$$

y por (a) se obtiene

$$D = \frac{1}{2} g S^2 \frac{\text{sen}^2 \varphi}{\cos \varepsilon}. \quad (f)$$

En estas dos ecuaciones D es el empuje en el caso del máximo, X el peso del prisma de mayor empuje, S la longitud del plano de rotura, y finalmente es $\varphi = \gamma$ el ángulo de rotura. Para mayor claridad escribiremos γ en vez de φ , con lo cual se tiene

$$X = \frac{1}{2} g S^2 \frac{\text{sen } \gamma \cos (\gamma + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \quad (82)$$

$$D = \frac{1}{2} g S^2 \frac{\text{sen}^2 \gamma}{\cos \varepsilon}. \quad (83)$$

El ángulo γ indica suficientemente que en estas ecuaciones X , S y D corresponden al prisma del mayor empuje.

Las dos ecuaciones [82 y 83] contienen dos reglas muy notables que forman el fundamento del cálculo gráfico y son las siguientes:

REGLA I.

Si AFE [fig. 40] es el prisma del máximo empuje, y si después de tirada E_p perpendicular al talud natural, se hace el ángulo $pEr = \varepsilon$, será

$$\text{área } AFE = \triangle AEr.$$

REGLA II.

Si en el talud natural AJ se hace $rq = Er$ y se tira la recta E_q , el triángulo Erq será la representación gráfica del empuje D en el caso de su máximo, ó bien será

$$D = g \cdot \Delta E_{rq}.$$

Demostración de la Regla 1ª Si AFE es el prisma de mayor empuje, será

$$X = g \cdot \text{área AFE}. \quad (a)$$

Por otro lado se tiene

$$\Delta AEr = \frac{1}{2} AE \cdot Er \cdot \text{sen } AEr.$$

$$\text{Pero } AE = S, \quad Er = \frac{E_p}{\cos \varepsilon} = \frac{AE \cdot \text{sen } \gamma}{\cos \varepsilon} = \frac{S \cdot \text{sen } \gamma}{\cos \varepsilon},$$

$$\sphericalangle AEr = \sphericalangle AEp - \varepsilon = 90^\circ - \gamma - \varepsilon,$$

$$\text{luego } \Delta AEr = \frac{1}{2} S^2 \frac{\text{sen } \gamma \cos [\gamma + \varepsilon]}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{X}{g}. \quad (b)$$

La última relación se sigue de (82). Comparando (a) con (b) resulta área AFE = ΔAEr , lo que queríamos demostrar.

Demostración de la Regla II.

$$\Delta Eqr = \frac{1}{2} E_p \cdot qr = \frac{1}{2} E_p \cdot Er$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E_p^2}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{AE^2 \text{sen}^2 \gamma}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{1}{2} S^2 \frac{\text{sen}^2 \gamma}{\cos^2 \varepsilon},$$

$$g \cdot \Delta Eqr = \frac{1}{2} g S^2 \frac{\text{sen}^2 \gamma}{\cos^2 \varepsilon} = D.$$

Si se baja Fa perpendicular al talud natural AJ y se hace $\sphericalangle aFb = \varepsilon$, será Fb paralela á Er, llamándose *línea de orientación*. Toda la dificultad de resolver gráficamente los problemas del empuje, consiste en hallar el punto E, de manera que área AFE sea = ΔAEr , á cuyo fin será muchas veces necesario tirar diferentes rectas paralelas á la línea de *orientación*.

Si la perpendicular Ep se designa por P, tendremos $P = S \text{sen } \gamma$, luego por [83]

$$D = \frac{1}{2} g \frac{P^2}{\cos^2 \varepsilon}, \quad (84)$$

fórmula que directamente contiene la ley hidrostática, si P se toma por altura y g por peso específico de un líquido. Hallado P gráficamente, la última fórmula [84] será muy cómoda para

calcular el empuje. Sin embargo, más fácil es medir la base rq y la altura P del triángulo Erq ; el empuje será simplemente

$$D = \frac{1}{2} g \cdot P \cdot rq, \quad (85)$$

expresión que para la determinación del resultado numérico solamente necesita cuatro multiplicaciones en vez de cinco.

Si la pared fuese vertical, coincidiría la línea de orientación con la perpendicular Fa , y sería Er idéntica á la perpendicular $Ep = P$.

Finalmente, si el paramento interior del muro se hallase inclinado en sentido opuesto, sería ε cantidad negativa y debería colocarse al otro lado de las normales Fa y Ep .

§ 32.

Aplicación I: Sea horizontal la superficie del terreno.

A. *Prisma de mayor empuje.* Sea AF la pared (fig. 41), AFE el prisma de mayor empuje, AJ el talud natural, $Ep = P$ la perpendicular bajada de E á AJ , $\sphericalangle_p Er = \sphericalangle FAB = \varepsilon$.

Por la regla I debe ser $\triangle AFE = \triangle AEr$, y como ambos tienen idéntica base AE , será igual también la altura. Además es $\sphericalangle ErA = 90^\circ + \varepsilon = \sphericalangle AFE$. Luego el triángulo AEr debe tener la base, la altura y el ángulo al vértice iguales á la base, altura y al propio ángulo del triángulo AFE . A estas condiciones satisfacen solamente dos triángulos AEr y AEr' congruentes entre sí y al $\triangle AFE$, uno de los cuales tiene su vértice en el talud natural y el otro en la horizontal AM . Pero si el $\sphericalangle Ear'$ (el mayor de los dos agudos que tiene el $\triangle Er'A$) se halla abajo, será $\sphericalangle Ear' = \sphericalangle AEF'$, luego Ar' paralela á FE . Así es que el triángulo EAR se hallará colocado de manera que el ángulo FAJ se divide por AE en dos partes iguales, resultando

$$\gamma = \frac{1}{2} FAJ = \frac{1}{2} (a - \varepsilon). \quad (86)$$

El plano de fractura divide en dos partes iguales el ángulo comprendido entre la pared y el talud natural, relación principal ya establecida en (35) del § 16, y que dá directamente el prisma de mayor empuje AFE .

B. *Máximo empuje D.* Si hacemos $rq = Er$ y tiramos Eq , conforme á la regla II, será el triángulo Erq la representación gráfica del empuje, ó bien

$$D = g \cdot \triangle Erq.$$

$$\text{Pero} \quad \Delta Erq = \frac{1}{2} Ep.rq = \frac{1}{2}.Ep. Er, \quad (2)$$

$$\text{en donde} \quad Ep = AE \operatorname{sen} \gamma = AE \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon);$$

$$AE = \frac{AB}{\cos BAE} = \frac{H}{\cos (\varepsilon + \iota)} = \frac{H}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)},$$

$$\text{luego} \quad Ep = H \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)}.$$

$$\text{Además es} \quad Er = \frac{Ep}{\cos \varepsilon} = \frac{H}{\cos \varepsilon} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)}.$$

Sustitúyanse los valores de Ep y Er en (a), sale

$$\Delta Erq = \frac{1}{2} \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)} \right)^2,$$

$$D = \frac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)} \right)^2, \quad (87)$$

expresión algebraica del empuje idéntica á la del § 17 ecuac. (41)

Si se hace $rq' = rq = rE$, (fig. 42), será $\Delta q'rE = \Delta qrE$ por tener igual base y altura, luego el empuje se representará también por el triángulo Erq' . Además como $FE = Er$, haciendo $FL = FE$, será $\Delta FLE \cong \Delta Erq'$, así que ΔFLE es una tercera representación gráfica del empuje, y aquella que ya hemos efectuado en el § 18 fig. 28.

§ 33.

Aplicación II: El terreno asciende según el talud natural.

Sea FJ paralela á AJ' el talud natural, Ep perpendicular á AJ' , $\sphericalangle Ep = \varepsilon$ [fig. 43]. La recta de fractura AE debe dividir en dos partes iguales la figura $AFEr$, luego en los triángulos AFE y AEr tienen que ser iguales las alturas Fm y nr .

$$\text{Ahora es} \quad Fm = AF \operatorname{sen} (\alpha - \varepsilon - \varphi),$$

$$\begin{aligned} nr &= Ar \operatorname{sen} \varphi = (Ap - rp) \operatorname{sen} \varphi = (Ep \cotg \varphi - Ep \operatorname{tang} \varepsilon) \operatorname{sen} \varphi \\ &= Ep \frac{\cos (\varepsilon + \varphi)}{\cos \varepsilon} = AF \operatorname{sen} (\alpha - \varepsilon) \frac{\cos (\varepsilon + \varphi)}{\cos \varepsilon}. \end{aligned}$$

Luego será

$$\begin{aligned} Fm: nr &= \text{sen}(\alpha - \varepsilon - \varphi) \cos \varepsilon : \text{sen}(\alpha - \varepsilon) \cos(\varepsilon + \varphi) \\ &= [\text{sen}(\alpha - \varphi) + \text{sen}(\alpha - 2\varepsilon - \varphi)] \\ &: [\text{sen}(\alpha + \varphi) + \text{sen}(\alpha - 2\varepsilon - \varphi)]. \end{aligned}$$

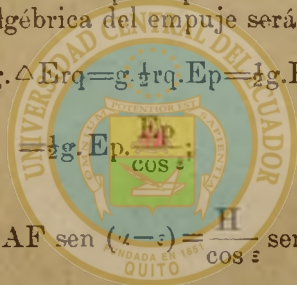
Por esta proporción será Fm siempre menor que nr , pero se aproximará tanto más á nr , cuanto menor es φ . Igualdad solo se obtiene por $\varphi = 0$, alejándose E hasta una distancia infinita.

Luego, cuando la superficie del terreno es el talud natural, se sigue que $\varphi = \gamma = 0$ y que la fractura AE se verifica según el talud natural AJ' del pie del muro, resultado conforme al § 28 ecuación (74).

Hágase $rq = Er$, y tírese Eq ; el triángulo Erq será la representación gráfica del empuje conforme á la regla II. En efecto, dicho triángulo se debería trasladar con el punto E hasta una infinita distancia; pero permaneciendo siempre entre las mismas paralelas FE y AJ' quedará invariable su área, sea cual fuere el punto E de FJ , de donde se principia con su construcción.

La expresión algebraica del empuje será

$$D = g \cdot \Delta Erq = g \cdot \frac{1}{2} rq \cdot Ep = \frac{1}{2} g \cdot Ep \cdot Er$$



$$= \frac{1}{2} g \cdot Ep \cdot \frac{Ep}{\cos \varepsilon}$$

y como

$$Ep = AF \text{ sen}(\alpha - \varepsilon) = \frac{H}{\cos \varepsilon} \text{ sen}(\alpha - \varepsilon),$$

resulta que

$$D = \frac{1}{2} g \cdot \frac{H^2}{\cos^2 \varepsilon} \left(\frac{\text{sen}(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \right)^2 \quad (88)$$

expresión idéntica á la [76] del § 28.

§ 34.

Aplicación III. El terreno asciende según un plano cualquiera.

Para resolver este problema gráficamente se necesita demostrar el teorema geométrico que sigue (fig. 44):

Teorema: Si tres rectas AF , FJ y AJ se cortan formando un triángulo, y se tiran dos trasversales Er y Fb paralelas entre sí en cualquiera dirección, la última por la intersección de AF y FJ , entonces el triángulo AFE será igual al triángulo AEr , si Ar es la media proporcional geométrica entre Ab y AJ .

Demostración Tirense Fa y Ep perpendiculares á AJ . Resultará:

$$\Delta AFJ = \Delta AFE + \Delta AEr + \Delta rEJ,$$

y en la hipótesis de que sea $\triangle AFE = \triangle AEr$, será

$$\triangle AFJ = 2\triangle AEr + \triangle rEJ,$$

ó bien si expresamos las áreas por las bases y alturas

$$\begin{aligned} AJ.Fa &= 2Ar.Ep + rJ.Ep \\ &= (2Ar + rJ)Ep \\ &= (Ar + AJ)Ep; \end{aligned}$$

luego
$$\frac{Fa}{Ep} = \frac{Ar + AJ}{AJ} \quad (a)$$

Por otro lado, la semejanza de los triángulos suministra la relación

$$\begin{aligned} Fa : Ep &= Fb : Er = bJ : rJ \\ &= AJ - Ab : AJ - Ar; \end{aligned}$$

luego también
$$\frac{Fa}{Ep} = \frac{AJ - Ab}{AJ - Ar} \quad (b)$$

Comparando esta expresión con (a) se deduce

$$\frac{Ar + AJ}{AJ} = \frac{AJ - Ab}{AJ - Ar},$$

de donde
$$AJ^2 - Ar^2 = AJ^2 - AJ.Ab;$$

luego
$$Ar^2 = AJ.Ab. \quad (c)$$

Este teorema conduce á la construcción exacta del prisma del mayor empuje (fig. 45). Sea AF la pared, FJ la superficie, AJ el talud natural del pie A del muro, Fb la línea de orientación, luego $Fa \perp AJ$, y $\angle Fa = \varepsilon$. Sobre AJ describese un semicírculo, el cual quedará cortado en *d* por la recta *bd* levantada en *b* perpendicularmente á AJ. Hágase $Ar = Ad$, tírese Er paralela á la línea de orientación, y finalmente tírese AE. Será AE la fractura y AFE el prisma de mayor empuje.

Según la construcción es $Ad^2 = Ab.AJ$, además $Ar = Ad$, luego $Ar^2 = Ab.AJ$; y como Er es paralela á Fb, se sigue por el teorema que $\triangle AFE = \triangle AEr$, luego según la regla I, AFE es el prisma de mayor empuje.

El empuje mismo queda representado por el $\triangle Erq$, el cual se construye según la regla II, haciendo $rq = Er$ y juntando E con *q*.

Construcción por aproximación. El cuadrilátero $AFEr$ tiene el nombre de *cuadrilátero de construcción*, pues está dotado de la propiedad notable de que, cuando es el verdadero, la diagonal Fr (que se llama segunda) se divide en dos partes iguales por la otra AE (que se dice primera y es idéntica al plano de fractura). Pues si los triángulos AFE y AEr son iguales, serán iguales también las alturas que corresponden á la base común AE ; luego será también $Fo=ro$.

Según esto, el prisma del máximo empuje se puede construir también con tanta aproximación como se quiera. Dado el triángulo AFJ [fig. 46] que forman la pared, superficie y talud natural del pie, y tirada la recta de orientación Fb , se tomará en FJ un punto E que probablemente satisfecerá á la condición de que $\triangle AFE$ debe ser igual al $\triangle AEr$, con tal que Er sea paralela á Fb , para lo cual ayudará introducir por el tal punto E una regla paralelamente á Fb . Hecho esto, se forma el cuadrilátero $AFEr$ de construcción y se tiran las diagonales Fr , y AE . Si el punto, en donde se cortan, es exactamente el medio entre F y r , entonces será AFE , inmediatamente, el prisma de mayor empuje. Mas comunmente, no sucederá así, siendo otro punto s el medio de Fr ; en cuyo caso se tirará AE' por s , se concluye el nuevo cuadrilátero $AFE'r'$, y se efectúa la misma prueba con sus diagonales Fr' y AE' , mirando si el punto o' en donde se cortan, está exactamente en medio de Fr' &c. Con algún ejercicio, se logrará hallar con suficiente exactitud el verdadero prisma de mayor empuje por medio de dos construcciones AE , y AE' . Pero si esto no sucediese, se tiraría por o' de nuevo una recta AE'' , construyendo el cuadrilátero correspondiente $AFE''r''$ &c.

§ 35

Aplicación IV: La superficie tiene la forma de un polígono.

Sea AF la pared (fig. 47), $F'F''F'''M$ la superficie formada por distintos planos, y sea AJ el talud natural del pie del muro. Construída la recta de orientación Fb , se buscará la parte de la superficie en que probablemente pudiera hallarse el punto E que unido con A debe dividir al área $AFF'F''ErA$ en dos partes iguales, con tal que sea Er paralela á la línea de orientación Fb . Parece que E se debe hallar en el plano $F''F'''$. Luego se tira $F''A$, y el polígono $AFF'F''A$ se convierte en un triángulo AfF'' , cuyo último lado fF'' sea la prolongación del plano $F''F'''$ en que debe hallarse E . Ahora el problema queda reducido al del § anterior, pues para hallar á E con exactitud bastará asignarle tal posición que sea $\triangle AfE = \triangle AEr$, en cuyo caso será también área $AFF'F''E = \triangle AEr$, condición conforme

á la regla I para que $\Delta FF'E$ sea el prisma de mayor empuje.

Aplicando el primer método de construcción, como AT es demasiado largo y algunas veces el papel no alcanzará para que contenga al punto T , en donde se cortan el talud natural AJ y la superficie transformada fF'''' , describiremos una semicircunferencia sobre Af , y tirada $f'b'$ paralela á la línea de orientación Fb , haremos $b'C$ (C está en Af) paralela á fF'''' , levantaremos CG perpendicular á Af hasta que corte á la semicircunferencia en G , haremos $AD=AG$, tiraremos Dr paralela á fF'''' y Cb' , y Er paralela, asimismo, á la recta de orientación Fb y también á $f'b'$. Por esta construcción es ΔAEr plano de fractura, $\Delta FF'E$ prisma de mayor empuje y ΔErq representación gráfica del empuje con tal que sea $rq=Er$.

Por la construcción es

$$AD^2 = AC \cdot Af \quad \text{luego} \quad \frac{AD^2}{AC \cdot Af} = 1. \quad (a)$$

Además es

$$\frac{AD}{AC} = \frac{Ar}{Ab'} \quad \text{y también} \quad \frac{AD}{Af} = \frac{Ar}{AT'}$$

luego por multiplicación

$$\frac{AD^2}{AC \cdot Af} = \frac{Ar^2}{Ab' \cdot AT'}$$

y como el primer miembro, por (a), equivale á la unidad, se sigue que es

$$Ar^2 = Ab' \cdot AT',$$

lo que según el párrafo anterior es la condición para que sea el triángulo AfE igual al ΔAEr , y por consiguiente que el área $\Delta FF'E$ sea igual al triángulo ΔAEr .

Si $F''F''''$ fuese menos largo de lo que es en realidad, pudiera acontecer que, por la construcción exacta, el punto E se hallará en la prolongación de $F''F''''$ y no sobre el plano inmediato $F''M$, en donde debería estar. En este caso habrá de repetirse la construcción, convirtiendo el polígono $\Delta FF'E''F''''A$ en triángulo, cuyo último lado sea la prolongación de MF'''' .

Puede aplicarse también el segundo método del último párrafo.

Continuará.