TEORIA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

Y DE LOS MUROS DE CONTENCION Y REVESTIMIENTO,

POR JOSE KOLBERG, S. J. — Profesor en la Universidad.

(Continuación. — V. el nº 82, pág. 428)

§ 36.

Aplicación V: La superficie es encorvada.

Sea AF la pared, (fig. 48) AJ el talud natural, FF′MK la superficie de las tierras. Tírese la línea de orientación Fb, y búsquese un punto E′ de tal posición en la superficie que tirada la recta AE′ sea, aproximadamente, área $AFF'E' = \triangle AE'r'$, con tal que $E'r'$ sea paralela á la línea de orientación Fb. Para ver, si es exactamente área $AFF'E' = \triangle A'E'r'$, la primera se deberá transformar en el $\triangle Af'E'$, cuyo lado Af' tenga la dirección de la pared, y tirada la segunda diagonal $f'r'$, se verá si la otra AE′ le corta en el punto medio o'. Si resultase $f'o'=o'r'$, sería con exactitud $\triangle Af'E' = \triangle AE'r'$, luego área $AFF'E' = \triangle A'rE'$ y E′ el punto verdadero que se busca. Pero si fuese $f'o' < o'r'$, como en efecto sucede en la figura, se tomaría otro punto E″ más á la derecha, y transformando $AFF'E'E''$ en el triángulo $Af''E''$ y haciendo $E''r''$ paralela á la recta de orientación Fb, se tirarán AE'' y $f''r''$, para ver si ahora es $f''o''=o''r''$, esto es, si el punto o'' en donde se cortan las diagonales, equidiste de f'' y r'', lo que tiene lugar en la figura con bastante exactitud, resultando que E″ es el punto buscado y que $AFF'E''A$ es el prisma de mayor empuje. Pero si $f''o''$ no fuera igual á

$o''r''$, se hará una segunda corrección &ª hasta que la aproximación sea la pedida.

Con este problema tenemos resuelto el más general de todos; sin embargo aplicaremos los diferentes métodos que hemos visto, á varios casos particulares, cuales ocurren en la práctica con mayor frecuencia.

§ 37.

Pared vertical; el terreno asciende según el talud natural y está terminado por un plano horizontal.

Este problema puede resolverse de diferentes maneras, por ejemplo, por los dos métodos expuestos en el § 34, transformando el triángulo ABD en el AFD (fig. 49), cuyo último lado sea la prolongación de la superficie horizontal de las tierras.

Otra construcción más sencilla es tomar en el talud natural AJ un segmento AP igual á AD, y después de haber levantado en AJ la perpendicular PE hasta que corte la superficie horizontal, unir A con E. Será AE el plano de fractura.

Para que esto se haga evidente (fig. 50), tírese DN paralela á EP y á la línea de orientación que, por $\varepsilon=o$, habrá de ser perpendicular á AJ, y prolónguense EP y DN hasta encontrar á la horizontal AR en S y Q. Además, tírese DM paralela á AB. El ángulo MDN será $=\sphericalangle JAR=\beta$ por tener los lados perpendiculares á los de este. Al $\sphericalangle DAJ$ le designaremos por λ.

Por la regla I debe ser.

$$\text{área } ABDE=\triangle AEP,$$

luego $$\triangle ABD+\triangle ADE=\triangle AEP,$$

$$\triangle ADM+\triangle ADE=\triangle AEP,$$

y cuando se resta la parte común AKM, será

$$2\triangle ADK+\triangle DKE=\text{área } MKEP,$$

$$2\triangle ADK+2\triangle DKE=\text{área } MKEP+\triangle DKE,$$

$$2\triangle ADE=\text{área } MDEP,$$

$$\text{paralelogramo } DEQS=\text{área } MDEP;$$

y por restar la parte común DEPN, será

$$\text{trapecio } NPQS=\triangle MDN. \qquad (a)$$

Pero se halla trapecio $NPQS = NP.\frac{NS+PQ}{2}$;

$$NP = AP - AN = AP - AD\cos\lambda,$$

$$PQ = AP \text{ tang } \beta,$$

$$NS = AN \text{ tang } \beta = AD \cos\lambda \text{ tg } \beta,$$

$NS + PQ = (AP + AD \cos\lambda) \text{ tang } \beta$; luego

$$\text{trapecio } NPQS = \tfrac{1}{2}(AP - AD\cos\lambda)(AP + AD\cos\lambda)\text{ tang } \beta,$$

$$= \tfrac{1}{2}(AP^2 - AD^2\cos^2\lambda)\text{ tang } \beta. \qquad (b)$$

Por otro lado es $\triangle MDN = \frac{1}{2} DN.MN$;

$$DN = AD \text{ sen } \lambda,$$

$$MN = DN \text{ tang } \beta = AD \text{ sen } \lambda \text{ tang } \beta;$$

$$\triangle MDN = \tfrac{1}{2} AD^2 \text{ sen}^2 \lambda \text{ tang } \beta. \qquad (c)$$

Según la relación (a), la expresión (b) tiene que ser igual á la (c); luego será

$$AP^2 - AD^2\cos^3\lambda = AD^2 \text{ sen}^2 \lambda,$$

$$AP^2 = AD^2(\text{sen}^2\lambda + \cos^2\lambda) = AD^2;$$

y por consiguiente es $AP = AD$, con lo cual la construcción esta demostrada.

La relación sencilla $AP = AD$ proporciona los medios de calcular el ángulo γ y el empuje D (fig. 49).

En el $\triangle$ AEP es

$AE \cos\gamma = AP$; y como $AE = \frac{AC}{\cos(\alpha-\gamma)} = \frac{H+h}{\cos(\alpha-\gamma)}$,

$$AP = AD = \frac{H+h}{\cos\delta}$$

resulta por sustitución

$$\frac{\cos\gamma}{\cos(\alpha-\gamma)} = \frac{1}{\cos\delta} \quad \text{ó bien} \quad \cos(\alpha-\gamma) = \cos\gamma\cos\delta,$$

y resolviendo el primer miembro, se deduce

$$\operatorname{tang}\gamma=\frac{\cos\delta-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{89}$$

El empuje mismo queda representado por el $\triangle$ EPq, en donde $Pq=EP$ y $EP \perp Pq$. Luego es

$$\triangle\, EPq=\tfrac{1}{2}\, EP.Pq=\tfrac{1}{2}\,(AP\operatorname{tang}\gamma)^2$$

$$=\tfrac{1}{2}\,(AD\operatorname{tang}\gamma)^2=\tfrac{1}{2}\left(\frac{H+h}{\cos\delta}\operatorname{tang}\gamma\right)^2$$

$$=\tfrac{1}{2}\left((H+h)\frac{\cos\delta-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\delta}\right)^2, \tag{d}$$

expresión que se puede transformar en otra que no contiene á h; porque como (fig 49)

$$CD=h\operatorname{tang}\alpha=(H+h)\operatorname{tang}\delta \tag{e}$$

$$h\,(\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\delta)=H\operatorname{tang}\delta,$$

sumando $H\operatorname{tang}\alpha$

$$(H+h)\,(\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\delta)=H\operatorname{tang}\alpha;$$

será $$H+h=H\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tg}\delta}=H\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\delta}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)};$$

lo que sustituído en (d), da

$$\triangle\, EPq=\frac{H^2}{2}\left(\frac{\cos\delta-\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)}\right)^2=\tfrac{1}{2}H^2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\delta)}\right)^2.$$

El empuje es $D=\frac{1}{2}g.\triangle\, EPq$, ó bien

$$D=\tfrac{1}{2}gH^2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\delta)}\right)^2. \tag{90}$$

Si se pone

$$\frac{w}{g}=\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\delta)}\right)^2, \tag{91}$$

será simplemente

$$D=\tfrac{1}{2}\,w\,H^2\,; \tag{92}$$

en donde w es el *peso específico de un líquido que produce la propia presión lateral.*

El caso de que tratamos, tiene dos límites:

I. *para* $h=0$, en cuyo caso las tierras están terminadas por un plano horizontal que pasa por la espalda del muro. Como por (e) es

$$\operatorname{tang} \delta=\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}+\mathrm{h}} \operatorname{tang} \alpha=\frac{1}{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{h}}+1} \operatorname{tang} \alpha \tag{f}$$

haciendo $h=0$, se tiene $\operatorname{tang} \delta=0$, $\delta=0$ y las ecuaciones (89) y (90) se convierten en

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang} \gamma=\dfrac{1-\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}=\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha ; \quad \gamma=\frac{1}{2} \alpha \\ \mathrm{D}=\frac{1}{2} \mathrm{gH}^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha \end{array}\right\} \tag{g}$$

relaciones idénticas á las (35) y (41) de los § 16 y 17, si allá se pone $\varepsilon=0$.

II. *para* $h=\infty$, y entonces estará limitado el terreno en su parte superior por el talud natural, resultando de (f), (89) y (90)

$$\operatorname{tang} \delta=\operatorname{tang} \alpha, \ \delta=\alpha,$$

$$\operatorname{tang} \gamma=0, \ \gamma=0; \ \mathrm{D}=\tfrac{1}{2} \mathrm{gH}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha;$$

lo que es conforme á las ecuaciones (74) y (76) del § 28, para $\varepsilon=0$.

La tabla IX sirve para simplificar el cálculo numérico, conteniendo los valores de $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{g}}$.

TABLA IX.

La altura a del centro del empuje es $\frac{1}{3}$ H en los casos límites h=0 y h=∞, cualquiera que sea el talud α, y tiene un máximo a=0,366 para tang δ=0,3 y α=1. Atendido el coeficiente de seguridad, esta altura se puede tomar =$\frac{1}{3}$ H; bastará en cualquier caso tomarla=$\frac{4}{9}$H. (fig. 51).

$\operatorname{tang}\delta = \frac{CD}{AC} = \frac{h}{H+h}\operatorname{tang}\alpha$, para la superficie horizontal de las tierras.

tang α para el talud natural	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
2,0	0,382	0.420	0,457	0,492	0,525	0,556	0,584	0,610	0,634	0,656	0,675	0,693	0,710	0,725	0,738	0,751	0,762	0,773	0,783	0,792	0,800
1,9	0,364	0,403	0,440	0.475	0,508	0,539	0,568	0,595	0,620	0,643	0,663	0,682	0,700	0,715	0,729	0,742	0,753	0,764	0,774	0,783	
1,8	0,346	0,385	0,422	0,458	0,491	0,522	0,552	0,580	0,605	0,629	0,651	0,671	0,689	0,705	0,719	0,732	0,743	0,754	0,764		
1,7	0,327	0,366	0,403	0,439	0,473	0,505	0,535	0,563	0,589	3,613	0,635	0,656	0,674	0,691	0,706	0,719	0,732	0,743			
1,6	0,307	0,346	0,383	0,420	0,455	0,488	0,519	0,548	0,574	0,597	0,620	0,641	0,659	0,676	0,602	0,706	0,719				
1,5	0,286	0,325	0,363	0,400	0,435	0,469	0,500	0,529	0,556	0,580	0,604	0,625	0,644	0,662	0,678	0,692					
1,4	0,265	0,303	0,341	0.378	0,414	0,448	0,480	0,510	0,537	0,563	0,586	0,609	0,628	0,646	0,662						
1,3	0.242	0,280	0,318	0,355	0,391	0,425	0,458	0,489	0,517	0,543	0,567	0,589	0,609	0,628							
1,2	0,219	0,256	0,294	0.331	0,368	0,402	0,435	0,466	0,495	0,522	0,547	0,570	0,590								
1,1	0,196	0,232	0,268	0,306	0,342	0,377	0,410	0,441	0,471	0,498	0.524	0,548									
1,0	0,172	0.207	0,243	0,280	0,316	0,351	0,384	0,416	0,446	0,474	0,500										

$$D = \frac{1}{2} w \, H^2$$

$$\left(\frac{w}{g} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\delta)}\right)^2$$

El centro del empuje puede hallarse por un cálculo, como lo hemos visto en el § 20. Siendo este muy largo y de ninguna importancia práctica, lo omitiremos; el resultado está indicado en la tabla IX.

§ 38.

Pared vertical: el terreno asciende por un talud cualquiera y en su parte superior está limitado por un plano horizontal.

Sea AB el paramento interior del muro, BD la superficie oblicua y DJ la horizontal en que las tierras terminan. La línea de orientación habrá de ser perpendicular al talud natural AJ; luego si AE es el plano de fractura y si EP se tira perpendicular á AJ, conforme á la regla I, habrá de ser área ABDE $= \triangle$ AEP.

Este caso puede resolverse por los métodos generales del § 34, transformando el $\triangle$ ABD en otro que tenga AD por base y una prolongación de JD por lado.

Pero puede reducirse también al caso anterior, lo que es más ventajoso cuando se trata del cálculo.

A este fin tiene que tirarse una recta B′D′ de manera que sea área AB′D′E=área ABDE y además B′D′ paralela al talud natural AJ; y como así debe ser $\triangle$ B′D′C$=\triangle$ BCD, tirando Ba paralela á B′D′ y AJ, se deduce que debe ser (fig 52)

$$\triangle B'D'C : \triangle BCa = CD'^2 : Ca^2$$
$$\triangle BDC : \triangle BCa = CD'^2 : Ca^2$$
$$\tfrac{1}{2}BC.CD : \tfrac{1}{2}BC.Ca = CD'^2 : Ca^2$$

de donde resulta

$$CD'^2 = Ca.CD = h^2 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \delta' \qquad (a)$$

Luego el punto D′ se determina buscando la media proporcional entre Ca y CD.

Hallada así la posición de B′D′, según el caso anterior, se hará AP=AD′, se levantará EP perpendicularmente á AJ y se tirará AE, con lo que tendremos la línea fractura. El empuje queda representado por el triángulo EPq en donde es Pq=EP.

Para el cálculo pueden aplicarse las fórmulas del último § y la tabla IX, más en vez de H, h, δ se deben sustituír las nuevas cantidades

$$H' = AB',\ h' = B'C \ \text{y}\ \delta' = \sphericalangle CAD', \qquad (b)$$

las cuales tienen las expresiones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} h'=CD' \cot g\,\alpha = h\sqrt{\dfrac{\tan g\,\alpha'}{\tan g\,\alpha}} \\ H'=H+h-h' \\ \tan g\,\delta' = \dfrac{CD'}{AC} = \dfrac{h}{H+h}\sqrt{\tan g\,\alpha \tan g\,\alpha'} \end{array}\right\} \quad (93)$$

Si el plano BD tiene grande extensión, podrá encontrarse en él el punto E, en cuyo caso no se pueden aplicar la construcción y fórmulas de este párrafo, sino las de los §§ 27 y 34, pues que entonces el caso es idéntico al de estos §§, en donde se supone que el terreno asciende por un solo plano. Para averiguar si se trata de uno ú otro caso, se tirará DP′ perpendicular á AJ, y construídas las diagonales AD y BP′, se verá si Bo' es mayor ó menor que $o'P'$; solo en la última hipótesis se aplicará este párrafo.

El empuje puede expresarse también por una fórmula que contenga directamente á las cantidades dadas H, h, α y α'; porque según (90), si se escribe H′ y δ' en lugar de H y δ, se sigue que es

$$D=\tfrac{1}{2}\,g\,H'^2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\delta')}\right)^2=\tfrac{1}{2}\,g\left(H'\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\delta')}\right)^2 \quad (c)$$

Pero por (93) es

$$H'=H+h-h'=H+h-h\sqrt{\frac{\tan g\,\alpha'}{\tan g\,\alpha}}=H+h-h\frac{\sqrt{\tan g\,\alpha \tan g\,\alpha'}}{\tan\,\alpha}$$

$$=\frac{(H+h)\tan g\,\alpha-h\sqrt{\tan g\,\alpha \tan g\,\alpha'}}{\tan g\,\alpha}. \quad (d)$$

Por otro lado se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\delta')}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\delta')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\delta')}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\delta')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\delta')}=\frac{\cos\delta'-\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta')}$$

$$=\frac{\cos\delta'-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\delta'-\cos\alpha\operatorname{sen}\delta'},$$

lo que, por las fórmulas

$$\cos\delta'=\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\,\delta'}} \text{ y } \operatorname{sen}\delta'=\sqrt{\frac{\tan g\,\delta'}{1+tg^2\,\delta'}},$$

se puede transformar en

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha+\delta')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\delta')} = \frac{1-\cos \alpha \sqrt{1+\operatorname{tang}^2 \delta'}}{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha \operatorname{tang} \delta'},$$

y por la última relación (93), en

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha+\delta')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\delta')} = \frac{1-\cos \alpha \sqrt{1+\frac{h^2 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha'}{(H+h)^2}}}{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha \frac{h}{H+h}\sqrt{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'}}$$

$$= \frac{(H+h)-\cos \alpha \sqrt{(H+h)^2 + h^2 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha'}}{\cos \alpha \left[(H+h)\operatorname{tg} \alpha - h\sqrt{\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha'}\right]}. \qquad (e)$$

Esta ecuación multiplicada por la (d), suministra

$$H'.\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha+\delta')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\delta')} = \frac{(H+h)-\cos \alpha \sqrt{(H+h)^2 + h^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'}}{\operatorname{sen} \alpha},$$

con lo cual resulta de (c), que es el empuje

$$D = \frac{g}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha}\left[H+h-\cos \alpha \sqrt{(H+h)^2 + h^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'}\right]^2. \qquad (94)$$

§ 39.

Pared oblicua, en la que el terreno asciende según un plano cualquiera, estando limitado en su parte superior por un plano horizontal.

Este caso contiene á los anteriores como particulares y queda representado en la fig. 53, bajo la hipótesis de que el punto E caiga en el plano horizontal DJ, y no en el oblicuo FD, en cuyo último supuesto habría de aplicarse la teoría de los §§ 27 y 34. Para averiguarlo, se tira Dr, paralela á la línea de orientación, es decir de manera que forme el ángulo ε con la normal á AJ, y después de haber construído las diagonales Fr_1 y AD, se mide Fo′, si es mayor ó menor que $o'r_1$. Solo si $Fo' < o'r_1$ el punto E puede caer sobre el plano horizontal y se aplicará la teoría del párrafo que venimos tratando.

El triángulo AFD puede convertirse en el AfD, y conforme á la regla I habrá de ser

$$\text{área AFDE} = \triangle \text{ AfE} = \triangle \text{ AEr}.$$

Pero tenemos

$$\triangle\, AfE=\tfrac{1}{2}\, AC\,(CE-Cf)=\tfrac{1}{2}\,(H+h)^2\,[\text{tang}\,(\alpha-\gamma)-\text{tang}\,\gamma], \quad (a)$$

$$\triangle\, AE_1=\tfrac{1}{2}\, AE.Ar\ \text{sen}\ \gamma \qquad \text{y como}$$

$$AE=\frac{H+h}{\cos\,(\alpha-\gamma)};\quad Ar=AE.\frac{\text{sen}\,(\gamma+90^\circ+\varepsilon)}{\text{sen}\,(90^\circ+\varepsilon)}=AE.\frac{\cos\,(\gamma+\varepsilon)}{\cos\,\varepsilon};$$

se tiene

$$\triangle AEr=\tfrac{1}{2}.AE^2\,.\frac{\cos\,(\gamma+\varepsilon)\ \text{sen}\ \gamma}{\cos\,\varepsilon}=\tfrac{1}{2}\,(H+h)^2\,\frac{\cos\,(\gamma+\varepsilon)\ \text{sen}\ \gamma}{\cos^2(\alpha-\gamma)\cos\,\varepsilon} \quad (b)$$

Luego, debiendo ser la expresión (a) igual á la (b), resulta la relación

$$\text{tang}\,(\alpha-\gamma)-\text{tang}\,\gamma=\frac{\cos\,(\gamma+\varepsilon)\ \text{sen}\ \gamma}{\cos^2(\alpha-\gamma)\ \cos\,\varepsilon}, \quad (c)$$

que sirve para hallar el ángulo γ, ó también á la tang $(\alpha-\gamma)$.

Para abreviar sea

$$\text{tang}\,(\alpha-\gamma)=x;\ \text{tang}\,\gamma=m;\ \text{tang}\,\alpha=a;\ \text{tang}\,\varepsilon=b;\ \text{tang}\,(\alpha+\varepsilon)=d \quad (d)$$

Será

$$\text{sen}\ \gamma=\text{sen}\,[\alpha-(\alpha-\gamma)]=\text{sen}\ \alpha\cos\,(\alpha-\gamma)-\cos\,\alpha\ \text{sen}\,(\alpha-\gamma)$$

$$=\cos\,(\alpha-\gamma)\cos\,\alpha\,[\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,(\alpha-\gamma)]$$

$$=(a-x)\cos\,\alpha\cos\,(\alpha-\gamma). \quad (e)$$

$$\cos\,(\gamma+\varepsilon)=\cos\,[(\alpha+\varepsilon)-(\alpha-\gamma)]$$

$$=\cos\,(\alpha+\varepsilon)\cos\,(\alpha-\gamma)+\text{sen}\,(\alpha+\varepsilon)\ \text{sen}\,(\alpha-\gamma)$$

$$=\cos\,(\alpha+\varepsilon)\cos\,(\alpha-\gamma)\,[1+\text{tang}\,(\alpha+\varepsilon)\ \text{tang}\,(\alpha-\gamma)]$$

$$=(1+dx)\cos\,(\alpha+\varepsilon)\cos\,(\alpha-\gamma). \quad (f)$$

$$\cos\,\varepsilon=\cos\,[(\alpha+\varepsilon)-\alpha]=\cos\,(\alpha+\varepsilon)\cos\,\alpha+\text{sen}\,(\alpha+\varepsilon)\ \text{sen}\ \alpha$$

$$=\cos\,(\alpha+\varepsilon)\cos\,\alpha\,[1+\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,(\alpha+\varepsilon)]$$

$$=(1+ad)\cos\,\alpha\cos\,(\alpha+\varepsilon). \quad (g)$$

Si los valores (d), (e), (f) y (g) se sustituyen en (c), resulta que

$$x-m=\frac{(a-x)\,(1+dx)}{1+ad},$$

$$x^2+\frac{2}{d}x=\frac{a+m(1+ad)}{d},$$

$$x=\frac{1}{d}\left[-1+\sqrt{(1+ad)\,(1+md)}\right] \tag{h}$$

con lo cual $x=\text{tang}\,(\alpha-\gamma)$ está conocido. Ahora es

$$\text{tang}\,\gamma=\text{tang}\,[\alpha-(\alpha-\gamma)]$$

$$=\frac{\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,(\alpha-\gamma)}{1+\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,(\alpha-\gamma)}$$

$$=\frac{a-x}{1+ax}$$

$$=\frac{1+ad-\sqrt{(1+ad)\,(1+md)}}{d-a+a\sqrt{(1+ad)\,(1+md)}}.$$

Como $d=\text{tang}\,(\alpha+\varepsilon)=\dfrac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\varepsilon}{1-\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\varepsilon}=\dfrac{a+b}{1-ab}$,

será $a+b=d-abd$, luego $d-a=b\,(1+ad)$

lo que sustituído en la expresión para tang γ, dá finalmente por división:

$$\text{tang}\,\gamma=\frac{\sqrt{1+ad}-\sqrt{1+md}.}{b\sqrt{1+ad}+a\sqrt{1+md}} \tag{95}$$

El empuje es conforme á la regla II

$$D=g.\triangle Erq=\tfrac{1}{2}g.Er^2\cos\varepsilon=\tfrac{1}{2}g\,AE^2\cdot\frac{\text{sen}^2\,\gamma}{\cos\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(H+h)^2}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{\text{sen}^2\,\gamma}{\cos^2\,(\alpha-\gamma)} \tag{96}$$

Pero es

$$\frac{\text{sen}^2\,\gamma}{\cos^2\,(\alpha-\gamma)}=\left[\frac{\text{sen}\,[\alpha-(\alpha-\gamma)]}{\cos\,(\alpha-\gamma)}\right]^2=\cos^2\alpha\left[\text{tg}\,\alpha-\text{tg}(\alpha-\gamma)\right]^2$$

$$=\frac{[\text{tg}\,\alpha-\text{tg}\,(\alpha-\gamma)\,]^2}{1+\text{tg}^2\,\alpha}=\frac{(a-x)^2}{1+a^2},$$

y cuando se sustituye el valor de x, será

$$\frac{\text{sen}^2\,\gamma}{\cos^2\,(\alpha-\gamma)}=\left[\frac{1+ad}{1+a^2}\right]\left[\frac{\sqrt{1+ad}-\sqrt{1+md}}{d}\right]^2$$

$$=\frac{1}{1-ab}\left[\frac{\sqrt{1+ad}-\sqrt{1+md}}{d}\right]^2; \qquad (i)$$

porque

$$\frac{1+ad}{1+a^2}=[1+\tan g\,\alpha \tan g\,(\alpha+\varepsilon)]:1+\tan g^2\,\alpha$$

$$=\left[1+\tan g\,\alpha\frac{\tan g\,\alpha+\tan g\,\varepsilon}{1-\tan g\,\alpha \tan g\,\varepsilon}\right]:1+\tan g^2\,\alpha$$

$$=\frac{1+\tan g^2\,\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varepsilon}:1+\tan g^2\,\alpha=\frac{1}{1-\tan g\,\alpha \tan g\,\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{1-ab}.$$

Con la ecuación (i) y además con $\frac{1}{\cos\varepsilon}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varepsilon}=\sqrt{1+b^2}$ el empuje (96) toma la forma:

$$D=\tfrac{1}{2}g(H+h)^2\,\frac{\sqrt{1+b^2}}{1-ab}\left[\frac{\sqrt{1+ad}-\sqrt{1+md}}{d}\right]^2; \qquad (97)$$

y designan

$$a=\tan g\,\alpha;\; b=\tan g\,\varepsilon;\; d=\tan g\,(\alpha+\varepsilon);\; m=\tan g\,\eta. \qquad (98)$$

Las dos primeras de estas cantidades se conocen directamente; la tercera es

$$d=\tan g\,(\alpha+\varepsilon)=\frac{\tan g\,\alpha+\tan g\,\varepsilon}{1-\tan g\,\alpha \tan g\,\varepsilon}=\frac{a+b}{1-ab}, \qquad (k)$$

y la cuarta es

$$m=\tan g\,\eta=\frac{Cf}{AC}=\frac{CG+Gf}{AC}=\frac{H \tan g\,\varepsilon+h \tan g\,\delta}{H+h}; \qquad (l)$$

en donde

$$\tan g\,\delta=\frac{CD}{H+h}, \qquad (m)$$

puede hallarse midiendo CD. Pero como $CD=BF+GD=H \tan g\,\varepsilon+h \tan g\,\alpha'$, se tiene también

$$\tan g\,\delta=\frac{H \tan g\,\varepsilon+h \tan g\,\alpha'}{H+h}, \qquad (n)$$

con lo cual (l) se transforma en

$$m=\tan g\,\eta=\frac{(H+h)\,H \tan g\,\varepsilon+hH \tan g\,\varepsilon+h^2 \tan\alpha'}{(H+h)^2}$$

$$=\frac{(H^2+2Hh+h^2)\tan\varepsilon+h^2\tan\alpha'-h^2\tan\varepsilon}{(H+h)^2}$$

$$=\tan\varepsilon+\left[\frac{h}{H+h}\right]^2(\tan\alpha'-\tan\varepsilon) \qquad (1)$$

$$=b+\frac{h^2(a'-b)}{(H+h)^2}; \qquad (\;)$$

en donde $a=\tan\alpha'$ se conoce por la inclinación que tiene el plano FD.

§ 40.

Centro del empuje.

El cálculo del centro del empuje se hace muy complicado en casi todos los casos, y con particularidad en el último caso del § 39. Hay un método gráfico muy sencillo que da el centro del empuje con grande aproximación.

Sea AE la fractura (fig. 54) y ABDE el perfil del prisma de mayor empuje, cualquiera que sea su forma. Como toda la masa, que tiende á separarse de la demás, debe tomar al caer la dirección del plano AE de fractura, se puede suponer que las moléculas del prisma ABDE cualquiera que sean, tienden hacia abajo en direcciones paralelas entre sí y al plano AE. Todas estas fuerzas paralelas é iguales componen una resultante que pasa por el centro de gravedad *S* del prisma ABDE y tiene una dirección paralela á AE. Así pues, si el centro de gravedad *S* se proyecta paralelamente á AE sobre el paramento interior AB del muro, el punto M que allí se encuentra, será también el centro del empuje normal D.

Si suponemos que el perfil del prisma de mayor empuje sea cuadrilátero, como es en realidad en la fig. 54, el centro de gravedad se halla, buscando los 1 y 2 de los triángulos ABD y ADE y haciendo $2S=13$. Hágase en seguida, SM paralela á AE, será M el centro del empuje, y será su altura AM, siempre algo mayor que $\frac{1}{3}$ H, porque en esta última altura se hallaría con exactitud el centro del empuje, si las tierras fuesen limitadas en su parte superior por un solo plano BE.

Es exactamente $AM=\frac{1}{3}H$ para $h=0$ y $h=\infty$; el máximo valor que AM puede tener, en la hipótesis de un cuadrilátero, es $\frac{1}{3}H+\frac{9}{100}H=\frac{42}{100}H$.

Continuará.