TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS
EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE SEGUNDA
CALCULO INFINITESIMAL

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

NOCIONES PRELIMINARES

1. OBJETO Y DIVISION DEL CALCULO INFINITESIMAL.— El *Cálculo Infinitesimal* que, como se ha visto (Intro. nº 10), se divide en *Cálculo Diferencial* y *Cálculo Integral*, trata, según lo entonces afirmado, de HALLAR LAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES POR MEDIO DE LAS RAZONES Ó RELACIONES QUE SE PUEDEN FORMAR ENTRE LOS INCREMENTOS Ó CAMBIOS DE VALORES DE LAS FUNCIONES Y LOS DE LAS VARIABLES DE QUE DEPENDEN.

El Cálculo Infinitesimal es como una continuación de la Geometría analítica, que trata de las líneas y superficies en general, representadas por medio de ecuaciones; de aquí, qne el estudio de aquél suponga un conocimiento siquiera elemental de ésta: *analizando las cualidades y caracteres de los elementos que pueden considerarse en las coordenadas de los diferentes puntos de las curvas, es como el Cálculo Infinitesimal determina en los límites, los valores de las razones que se puedan formar con tales elementos;* límites que son como las expresiones últimas de esos valores; y por esto se llaman *últimas razones.*

Así pues, son ÚLTIMAS RAZONES *los límites de las relaciones que se establecen entre los elementos ó incrementos infinitésimos de una función y su variable, ó de una ordenada y la abscisa correspondientes á un punto de una curva cualquiera.* Estas últimas razones se denominan *cocientes diferenciales* ó *derivadas;* y descubrirlas es el problema del Cálculo diferencial.

Esto supuesto, el Cálculo Infinitesimal, objeto de nuestro estudio, se ha llamado así, porque Leibnitz dedujo la teoría que lo constituye, de la consideración de los límites á que se acercan las diferencias de cantidades pequeñísimas, que él denominó *los infinitamente pequeños,* y son las infinitésimas de que hemos tratado [P. I, núms. 48 y sigts.]

Por lo expuesto podemos dar de esta parte de las Matemáticas sublimes la siguiente definición más comprensiva:

El **CALCULO INFINITESIMAL** INVESTIGA, POR MEDIO DE LAS ÚLTIMAS RAZONES, LAS PROPIEDADES DE LAS LÍNEAS, SUPERFICIES Y CUERPOS. Y como hay que observar con este fin los cambios de valores verificados en dichas extensiones, podemos, con más gereralidad, decir que

El **CALCULO INFINITESIMAL** ESTUDIA LA NATURALEZA Y PROPIEDADES DE LA EXTENSION, MEDIANTE LOS CAMBIOS QUE EN ELLA SE VERIFICAN POR EL TRÁNSITO DE LOS VALORES DE UN ESTADO Á ÓTRO.

Así, se ha llamado CÁLCULO DIFERENCIAL una de las partes del Infinitesimal, porque éste se propone, en un sentido, hallar las partes infinitamente pequeñas, denominadas DIFERENCIAS, que pueden suponerse en las funciones, y cuya significación ya conocemos (P. I, nº 57); y se ha designado con el nombre de CÁCULO INTEGRAL otra de las partes de dicho cálculo, porque el mismo, en otro sentido, y supuesto el hecho (real y verdadero) de constar una función de un número muy grande de partes muy pequeñas, se propone, conociendo separadamente tales partes, reunirlas ó sumarlas (reconstruir diremos, ó INTEGRAR EL TODO), para descubrir la naturaleza de la función que son capaces de formar.

2 DEFINICION DEL CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.—Aunque la exposición precedente ya manifiesta el objeto de estas partes, sin embargo, para más claridad y como un resumen de lo dicho, se infiere que

EL CÁLCULO DIFERENCIAL INVESTIGA LA NATURALEZA DE LAS RELACIONES QUE SE ESTABLECEN ENTRE LOS INCREMENTOS DE LAS FUNCIONES Y LOS DE LAS VARIABLES DE QUE DEPENDEN, CUANDO DICHAS RELACIONES SE CONSIDERAN EN EL ESTADO DE ÚLTIMAS RAZONES.

EL CÁLCULO INTEGRAL, AL CONTRARIO, CONOCIDAS LAS ÚLTIMAS RAZONES QUE SE PRESENTAN EN EL ESTUDIO DE LAS CUESTIONES ORDINARIAMENTE GEOMÉTRICAS, INQUIERE LA NATURALEZA DE LAS FUNCIONES Á QUE PUEDEN CORRESPONDER.

3. ORIGEN DEL CALCULO INFINITESIMAL.—Ya lo hemos dicho (P. I, nº 51), que *el problema de las tangentes á las curvas* fué que originó tan sublime cálculo. En efecto, el sabio matemático Barrow, maestro del inmortal Newton, dió á luz en el año de 1 676, un método para trazar esas tangentes, método que, si no era el cálculo indicado, podía mirárselo á lo menos, como el precursor de éste; pues que se fundaba *en la diferencia de los elementos* que pueden considerarse en las curvas, y que es, como se ha visto (nº 1), el procedimiento del Cálculo infinitesimal. Once años después Newton, discípulo y émulo de Barrow, con el nombre de EL MÉTODO DE LAS FLUXIONES publicó una teoría que no fué otra cosa que el Cálculo infinitesimal de que tratamos, medio poderoso de que han podido disponer en los tiempos modernos las ciencias de la Cantidad y la Extensión para establecer con seguridad absoluta las leyes que se proponen descubrir.

Pero lo notable del Cálculo infinitesimal consiste en que su descubrimiento fué debido simultáneamente á las dos más robustas inteligencias del siglo XVII, Newton, matemático inglés, y Leibnitz, geómetra alemán: ambos lo inventaron y, á la verdad, por muy distinto camino.

SISTEMA DE NEWTON. Se ha llamado este sistema el MÉTODO DE LAS FLUXIONES, porque Newton, haciendo intervenir el MOVIMIENTO y el TIEMPO en la generación de la cantidad extensa, denominó FLUENTES las magnitudes que cambiaban con el tiempo; y FLUXIONES, las derivadas ó razones últimas (nº 1), que miden la rapidez con que varían aquéllas. En el sistema del geómetra inglés, la variable *escencialmente independiente* es el *tiempo:* las magnitudes se consideran engendradas por un movimiento continuo; y los aumentos que reciben, aunque sean diferentes, se verifican en tiempos iguales, para lo que basta suponer velocidades diferentes.

METODO DE LEIBNITZ. Consiste en suponer las magnitudes determinadas como compuestas de un número infinito de partes muy pequeñas (P. I, nº 57, manera 2ª), cuyas diferencias son valores pequeñísimos, que el matemático alemán llamó *los infinitamente pequeños* (Id., nº 37), porque tienen una influencia despreciable en las magnitudes susceptibles de apreciación cuantitativa, por lo que se anulan ó desprecian con relación á éstas. Así como Leibnitz introducía varios ordenes de pequeñez en las infinitésimas ó *infinitamente pequeños*, aceptaba *varios ordenes de diferenciales*, denominaciones que se explicarán después: por esto consideraba la *diferencial primera* como infinitameute pequeña con relación á la ordenada; la *diferencial segunda* tenía el mismo carácter respecto de la diferencial primera; y así sucesivamente. En consecuencia, despreciaba únas por razón á ótras, lo que en efecto debe hacerse cuando se consideran los limites (Id., nº 55).

Con motivo pues, de haber publicado Juan Cristóbal Esturmio, erudito matemático, un método por el cual demostraba con más sencillez las propiedades de las figuras que estudiaron Euclides, Arquimedes y ótros; Leibnitz emitió su teoría principiando con los siguientes notables conceptos que se leían en las actas de la ciudad de Leipsick, correspondientes al año de 1 684, tres años antes de dar Newton á luz su método de las fluxiones:

"......Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenus adhibitas, omnes deduci posse ex generali quodam meo dimetiendorum curvilineorum principio, *quod figura curvilinea censenda sit æquipolere polygono infinitorum laterum;* unde sequitur, quicquid de tali polygono demonstrari potest, sive ita, ut nullus habeatur ad numerum laterum respectus, sive ita, ut tantò magis verificetur quantò major sumitur laterum numerus, ita, ut error tandem fiat quovis dato minor; id de curva posse pronuntiari" (1).

Sigue después, en las mismas actas, una Memoria de Leibnitz sobre el *Cálculo diferencial;* es decir, sobre un cálculo, cuyo objeto es la diferencia de magnitudes infinitamente pequeñas respecto de ótras.

4. NEWTON Y LEIBNITZ.—Por la manera de procedencia se han motivado disputas acerca del verdadero inventor del Cálculo infinitesimal; pero, prescindiendo de controversias inútiles, se debe afirmar que la gloria de la invención corresponde á las dos grandes lumbreras de las ciencias matemáticas en el siglo XVII, Newton y Leibnitz. Lo descubrió cada uno separadamente: 1º, porque difieren notablemente en la forma las respectivas teorías: Leibnitz no demostró su método; y Newton lo hizo, aunque fué valiéndose de las idea de movimiento, bastante extrañas en la análisis; y 2º, porque el método

(1) Soy pues, del parecer que tanto éste como los demás métodos que se han empleado hasta ahora, se pueden deducir de mi principio general de la medición de las figuras curvilíneas, *que una figura curvilínea se debe juzgar que equivale á un polígono de un número infinito de lados;* de donde se sigue, que lo que se puede demostrar de semejante polígono, ya de modo que no se tenga ningún respecto al número de sus lados, ó ya de modo que tanto mejor se verifique cuanto mayor se tome el número de esos lados, de modo que el error sea por último menor que cualquier dado, esto mismo se puede asegurar de la curva.

de Leibnitz, si bien era sencillo y de fáciles aplicaciones, carecía de claridad y exactitud; el de Newton era exacto, pero largo, fastidioso y difícil de aplicar. Así, aunque la ciencia infinitesimal fué descubierta por los dos, sólo con el trascurso de los años logró desarrollarse; y sucedió cuando d'Alembert, con la notación de Leibnitz y el método de las primeras y últimas razones de Newton, reunió y demostró las proposiciones de que vamos á ocuparnos, y que constituyen tan precioso cálculo: la obra de d'Alembert se conoció con el nombre de **Método de los Límites.**

5. **FUNCIONES QUE SE ESTUDIAN.**—Ya en la P. I, n^{os} 61 y siguientes, hemos visto que las funciones pueden ser *continuas* y *discontinuas*: en las continuas la ley

$$y=f(x)$$

entre la función y la variable, se verifica siempre para todos los puntos de la curva; en las discontinuas se interrumpe dicha ley, por tomar la expresión otros valores; y como es el objeto del Cálculo infinitesimal descubrir las propiedades de las líneas, superficies y cuerpos, lo que supone relaciones fijas ó permanentes y determinadas entre los elementos que forman la materia de la investigación; se infiere, que cuando estas relaciones se interrumpen falta la condición del estudio: así que el Cálculo infinitesimal sólo trata de las funciones continuas.

6. **CONDICIONES PARA LA INVESTIGACION.**—Como se ha dicho al hablar del *valor crítico* en el lugar citado, las funciones discontinuas pueden no serlo en parte ó entre ciertos límites: partiendo, por ejemplo, del origen O (fig. 1), son continuas las curvas de la figura, para las ordenadas OK y AF, AF' y BE, BE' y CD; ó sean, para los valores de las abscisas

$$x=0,\ x=OA;\quad x=OA,\ x=OB;\ x=OB,\ x=OC;$$

y así, cuando hayan de estudiarse curvas ó extensiones semejantes, se podrán aplicar á tales partes las reglas del Cálculo infinitesimal.

Pero como al tratarse de una curva cualquiera

$$y=f(x), \qquad [1]$$

representada por la figura 2, no se puede siempre saber *á priori* si es continua para todos los valores de la abscisa x, se hace necesario asignar á la variable dos límites, como

$$x=OA, \quad x=OB,$$

entre los cuales se supone existir dicha continuidad, para poder introducir en el estudio de la curva los principios del cálculo: tal es la razón por qué en el examen analítico de las curvas se fijan siempre á la variable dos límites ó valores.

7. **METODO.**—Tanto el tratado del Cálculo diferencial, como el del integral, se dividirán, por razón del método, en dos libros: en el *primero* se expondrán los principios generales ó fundamentales de cada uno de ellos; en el *segundo*, la aplicación de tales principios al estudio de las figuras en particular.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1651
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

CALCULO DIFERENCIAL

LIBRO I

PRINCIPIOS GENERALES

DE

DIFERENCIACION

I

DE LA DERIVADA PRIMERA Ó COCIENTE DIFERENCIAL

---

8. **ECUACION FUNDAMENTAL.**—A partir de la ecuación (33) [P. I, nº 62],

$$\Delta y = y_1 - y = f(x+\Delta x), \qquad [2]$$

que expresa el incremento de una función continua

$$y = f(x),$$

cuando la variable recibe un incremento arbitrario cualquiera, Δx, pero muy pequeño, resulta, dividiendo esa ecuación por esta cantidad,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad [3]$$

forma de la razón entre el incremento de la función y de la variable, y es la *expresión general* ó *fundamental* del Cálculo diferencial: por medio de ella nos proponemos

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1651
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

investigar las propiedades de las funciones cuando se establecen razones semejantes; y deducir todas las consecuencias posibles, según la naturaleza particular de las cuestiones que se estudien: éste es el objeto de la *ciencia diferencial.*

Si en vez de considerar el límite de los términos de la ecuación [2], como se ha hecho en el lugar citado, lo consideramos respecto de la [3], se halla

$$\text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{lím.}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \qquad [4]$$

que es *el límite de las relaciones establecidas en la (3);* así que los miembros de la [4] son las ÚLTIMAS RAZONES definidas en el nº 1.

9. **FUNCION DERIVADA.**—Las magnitudes Δy, Δx, en el caso de las ecuaciones [2] y [3], son susceptibles de tomar valores cada vez más pequeños, es decir, tienden á ser infinitésimas; pero en la ecuación [4] adquieren ya el carácter de tales; y son, en consecuencia, iguales á cero, ó tienen cero por límite. Si pues, Δy, Δx son las diferencias de los valores que adquieren la función y su variable respectivamente, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es el cociente de tales diferencias; por lo cual

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$\text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

la *razón última* ó el *límite del cociente de dichas diferencias;* que por esto se llama COCIENTE DIFERENCIAL *de la función propuesta, relativamente á la variable de que depende*, y se designa por el símbolo

$$\frac{dy}{dx} \text{ ó } y',$$

que se lee: *la diferencial de y* [la función] *relativamente á x* [la variable]. Además, el segundo miembro de [4] se representa por los símbolos $f'(x)$, f'_x, $[x]'$; de manera que esta ecuación se escribe también

$$y' = f'(x) = f'_x = [x]', \qquad [5]$$

nueva forma para significar el cociente diferencial de [1]; y como este cociente es de ordinario otra función, se ha llamado por Lagrange, *la función derivada de la función propuesta;* porque, en efecto, de ella procede ó se deriva: $f(x)$ se llama entonces la *función primitiva.*

10. DIFERENTES DERIVADAS.—Si, como se ha dicho, es $f'[x]$ la derivada de $f[x]$, por operaciones análogas se podrá derivar de $f'[x]$ otra función; de ésta, otra nueva función; y así sucesivamente. Por esto es que la ecuación [5] se denomina la DERIVADA PRIMERA ó, simplemente, la DERIVADA, designándose así la primera ó del primer orden.

11. COCIENTE DIFERENCIAL.—Por lo dicho Δx caracteriza una magnitud arbitraria, como incremento que es de la variable; y es variable también, porque toma valores cada vez más pequeños; de modo que puede *disminuir hasta cero;* y como entonces

$$\text{lím. } \Delta x = 0;$$

se sigue de [4] ó [5], que

EL COCIENTE DIFERENCIAL ES EL LÍMITE DE LA RAZÓN ENTRE EL INCREMENTO DE LA FUNCIÓN Y EL DE LA VARIABLE, AL ACERCARSE ÉSTE INDEFINIDAMENTE Á CERO.

12. VALOR DE LOS TERMINOS.—Siendo

$$\text{lím.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{lím. } \Delta y}{\text{lím. } \Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

resulta

$$dy = 0, \quad dx = 0;$$

pues

$$dy = \text{lím. } \Delta y = 0, \quad dx = \text{lím. } \Delta x = 0.$$

Sin embargo, estos valores no son absolutos; pues, como ya se ha observado [P. I, nº 51], en la *ciencia infinitesimal* se consideran tanto las cantidades finitas ó determinadas, como las sucesivas aproximaciones á cero de las funciones ó magnitudes decrecientes; y como tales aproximaciones se hallan cada vez más inmediatas á este límite, resultan los varios órdenes de infinitésimas que dejamos estudiados en la P. I; y se deduce, que con relación á una cantidad finita son rigurosamente dy, dx cantidades iguales á cero, mas no en el orden de las infinitésimas en que se consideren: retienen así en este orden sólo el carácter de cantidades que se aproximan á cero [P. I, nº 55]: no de otro modo se puede afirmar, por ejemplo, que una superficie sea cero sino con relación á un volumen: lo es en efecto, por cuanto una superficie nada añade á un volumen en el orden de la extensión que determina éste; y sin embargo, al concepto matemático de la superficie, en sí considerado, repugna el valor cero.

13. FORMA CONTENIDA EN EL SIMBOLISMO EMPLEADO.—Si no obstante el sentido que, por lo dicho, deben tener dy, dx, en sí consideradas, *ser magnitudes que se acercan más y más á cero;* se redarguyera, que tales explicaciones no son más que una manera de ocultar *el cero;* y que, por lo mismo, *es absurdo el Cálculo infinitesimal;* pues que no es posible calcular con la nada: *ex nihilo nihil fit* (1)*;* contestaríamos, que aun en este caso, verificándose

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0},$$

el símbolo $\frac{dy}{dx}$, *que designa siempre la operación que debe hacerse*, indica una indeterminación; ó que *el simbolismo empleado en este cálculo, es esencialmente de forma indeterminada;* luego el Cálculo infinitesimal comprende IPSO FACTO todos los medios que la análisis suministra para hallar los valores de las formas indeterminadas.

(1) Tal fué la objeción que se hizo á la aparición del Cálculo infinitesimal.

AREA HISTORICA DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Como se ha visto en el álgebra elemental y en la P. I, nº 38, el símbolo de indeterminación $\frac{0}{0}$ puede tener valores verdaderamente determinados; por tanto, aun en dicho concepto, $\frac{dy}{dx}$ dará siempre valores reales ó verdaderos; y así, el genérico que le corresponde f′(x), *que designa el resultado de la operación*, manifestará que, en cada cuestión particular, *ése y no ótro, es el resultado que se busca.*

14. INVERSION.—La serie de operaciones por las cuales de la función primitiva, f(x), venimos á la derivada, f′(x), manifiesta que hay entre éstas una dependencia necesaria, en virtud de la cual se determina una de las magnitudes por medio de la ótra; y viceversa. Esto indica la relación en que están el Cálculo diferencial y el Cálculo integral: el uno es la inversión del ótro.

(Continuará)

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

AVIS IMPORTANT

L' Université de Quito, désirant accroître ses Musées de zoologie, botanique, minéralogie et ethnologie, s' est proposée de se mettre en relation avec les divers Musées d' Europe qui voudraient faire ses échanges de collections, etc. A ce propos, elle est toute disposée d' envoyer aux Musées, publics ou particuliers, qui se mettront en rapport avec elle, des exemplaires de la faune, de la flore, etc. équatoriennes, en échange des exemplaires étrangers qu' on voudrait, bien lui envoyer.

Les personnes qui, voulant accepter cette excellente manière d' enrichir leurs Musées, desiréraient tel ou tel exemplaire, telle ou telle collection, par exemple, une collection ornithologique, n' ont que s' adresser à

"*Mr. le Recteur de l' Université Centrale de l' Equateur.*

Quito"

ou á

"*Mr. le Secrétaire de l' Université Centrale de l' Equateur.*

Quito."

TRADUCCION

AVISO IMPORTANTE

La Universidad de Quito, con el objeto de fomentar sus Museos de zoología, botánica, mineralogía y etnografía, ha resuelto establecer cambios con quienes lo soliciten ; y á este fin, estará pronta á enviar á los Museos públicos ó privados, que se pusiesen en correspondencia con ella, ejemplares de fauna, flora, etc. ecuatorianos en vez de los extranjeros que se le remitiesen.

Quien, aceptando esta excelente manera de enriquecer sus Museos, quisiese un determinado ejemplar ó una determinada colección, v. g.: una ornitológica, etc., diríjase al

"*Señor Rector de la Universidad Central del Ecuador.*

Quito"

ó al

"*Señor Secretario de la Universidad Central del Ecuador.*

Quito."

LOS ANALES DE LA UNIVERSIDAD

se canjean con toda clase de publicaciones científicas y literarias. También se canjean colecciones de éstas, con colecciones de los Anales.

Para todo lo relativo á los Anales, dirigirse al Sr. Dr. Daniel Burbano de Lara, Secretario de la Universidad.

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

VALOR DE LA SUSCRIPCION

Suscripción adelantada por una serie.............$ 2.40