TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

CALCULO DIFERENCIAL

LIBRO I

PRINCIPIOS GENERALES DE DIFERENCIACION

IV

Derivadas de las funciones algébricas

(Continuación de la página 396, Núms. 102, 103 y 104)

$$y=F\left\{f[\varphi\ldots\ldots\psi(x)\ldots\ldots]\right\} \qquad [q]$$

que es la forma general de semejantes expresiones. Cuando ocurren en la análisis funciones de esta clase, la derivada se obtiene por el siguiente

Teorema. EL COCIENTE DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN DE FUNCIÓN RELATIVAMENTE Á LA ÚLTIMA VARIABLE Ó DE LA QUE TODAS DEPENDEN, **es igual al producto de los cocientes diferenciales de cada una de las funciones relativamente á su variable.**

Decimos, que para la expresión (q) producida en la forma indicada, esto es, siendo y, t, u, v,......, z, x las sucesivas funciones y variables, debe ser

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{du}\,\frac{du}{dv}\,\cdots\cdots\,\frac{dz}{dx}$$

DEMOS.[n] Es manifiesto que la magnitud del cambio verificado en las funciones se expresará por

$$y_1 - y,\ t_1 - t,\ u_1 - u,\ v_1 - v, \ldots\ldots z_1 - z$$

si se verifica en la variable última el cambio $x_1 - x = \Delta x$; y esos cambios ó diferencias relativamente á los cambios ó diferencias de las variables correspondientes, dan las razones

$$\frac{y_1 - y}{t_1 - t},\ \frac{t_1 - t}{u_1 - u},\ \frac{u_1 - u}{v_1 - v}, \ldots\ldots,\ \frac{z_1 - z}{x_1 - x},$$

ó

$$\frac{\Delta y}{\Delta t},\ \frac{\Delta t}{\Delta u},\ \frac{\Delta u}{\Delta v}, \ldots\ldots,\ \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

que, por la influencia de las únas en las ótras, producen la serie de RAZONES DE RAZONES Ó QUEBRADOS DE QUEBRADOS, cuya reducción, ó valor total, se obtiene, como se sabe, por la operación

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \text{ de } \frac{\Delta t}{\Delta u} \text{ de } \frac{\Delta u}{\Delta v} \text{ de } \ldots\ldots \text{ de } \frac{\Delta z}{\Delta x}^{*}$$

$$=\frac{\Delta y}{\Delta t}\,\frac{\Delta t}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta v}\ldots\ldots\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ó $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta t}\,\frac{\Delta t}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta v}\ldots\ldots\frac{\Delta z}{\Delta x};$$

y así, en el límite,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{du}\,\frac{du}{dv}\ldots\ldots\frac{dz}{dx} \qquad (27)$$

L. Q. D. D.

Observación.—La expresión precedente se escribe también

$$\frac{dy}{dx}=F'(t)f'(u)\Phi'(v)\ldots\ldots\Psi'(x),$$

ó $$dy=F'(t)\,f'(u)\,\Phi'(u)\ldots\ldots\Psi'(x)\,dx; \qquad [28]$$

y también

$$dy=F'(t)\,f'(u)\,\Phi'(v)\ldots\ldots dz. \qquad [29]$$

El teorema es, además, de grandísima utilidad, porque apenas puede darse una expresión, por simple que sea, que no contenga una función de función: los ejem-

(*) Forma tanto más exacta, cuanto que, para significar el influjo de las magnitudes, únas en otras, se lee la expresión [q]: *y es de la función de la función de la función ....de x,* plos que siguen manifestarán esta verdad; y también la teoría expuesta hasta aquí encontrará la aplicación en tales

Ejemplos.

1º Sea

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Es manifiesto que la expresión depende: 1º, del radical; y 2º, del valor del subradical; por lo que haciendo

$$y = F(t) = \sqrt{}, \quad t = f(u) = a^2 - x^2,$$

será por la (27), en el caso de dos funciones (teors. de los núms. 24, 23 y 22, IV y I, corol.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d(\sqrt{})}{dt} \cdot \frac{d(a^2 - x^2)}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2(a^2 - x^2)} \cdot -2x$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

ó

$$dy = -\frac{x \, . \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

2º Sea

$$y = \sqrt[4]{\left[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}\right]^3}.$$

En este ejemplo el valor de la función depende de un radical de 4º grado; el subradical, de una potencia; la potencia, de una suma de sumandos variables, uno de los cuales cambia con un denominador irracional; y el otro, con una raíz que depende de una potencia; ésta, de una suma algébrica; la suma, de otra potencia; y ésta, de x: la aplicación de los teoremas convenientes produce

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt[4]{\left[a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right]^3}}{4\left[a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right]^3}\cdot 3\left[a-\frac{b}{\sqrt{x}}\right.$$

$$\left.+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right]^2\left[\frac{b\sqrt{x}}{2x^2}+\frac{\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}{3(c^2-x^2)^2}.2(c^2-x^2)-2x\right]$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\sqrt[4]{\left[a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right]^3}}{a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}\left[\frac{b}{2\sqrt{x^3}}\right.$$

$$\left.-\frac{4}{3}\frac{\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}{c^2-x^2}.x\right]$$

$$=\frac{\frac{3b}{2\sqrt{x^3}}-\frac{4x}{\sqrt[3]{c^2-x^2}}}{4\sqrt[4]{a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}};$$

ó $$dy=\frac{\frac{3b}{2\sqrt{x^3}}-\frac{4x}{\sqrt[3]{c^2-x^2}}}{\sqrt[4]{a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}}.\,dx.$$

3º La diferencial de

$$y=a+b\sqrt{x}-\frac{c}{x},$$

es $$dy=\frac{b.\,dx}{2\sqrt{x}}+\frac{c.\,dx}{x^2}.$$

4º La de

$$y=a-\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{e}{x^2},$$

es
$$dy=\frac{2b.dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4c.dx}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2e.dx}{x^3}.$$

5º La de

$$y=(a+bx^4)^n,$$

es
$$dy=4bn(a+bx^4)^{n-1}x^3.dx.$$

6º La de

$$y=(ax+bx^3)^n,$$

es
$$dy=n(ax+bx^3)^{n-1}(a+3bx^2)dx.$$

7º La de

$$y=\sqrt{ax},\quad \text{es } dy=\frac{a.dx}{2\sqrt{ax}}$$

8º La de

$$y=(ax-bx^2)^{-n},$$

es
$$dy=n(2bx-a)(ax-bx^2)^{-[n+1]}.dx.$$

9º Para

$$y=ax^{\frac{1}{4}}+c,\qquad \text{es}\qquad dy=\tfrac{1}{4}ax^{-\frac{3}{4}}.dx.$$

10. Para

$y=ax^{-\frac{1}{2}}+c,$ es $dy=-\frac{1}{2}ax^{-3/2}.dx.$

11. Para

$y=[a+bx^n]^m,$ es $dy=mnb[a+bx^n]^{m-1}x^{n-1}.dx.$

12. Para

$$y=R^4\frac{2x^2-R^2}{x[R^2-x^2]\sqrt{R^2-x^2}},$$

es
$$\frac{dy}{dx}=R^4\frac{[R^2-x^2]^2+3x^4}{x^2[R^2-x^2]^2\sqrt{R^2-x^2}}$$

13. Para

$$y=x\sqrt{[R+\sqrt{R^2-x^2}]^2+x^2},$$

es $$dy=R\frac{2[R+\sqrt{R^2-x^2}]\sqrt{R^2-x^2}-x^2}{\sqrt{[(R+\sqrt{R^2-x^2})^2+x^2](R^2-x^2)}}.dx.$$

14. Para

$$y=\frac{2R-x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x},$$

es
$$dy=-\frac{3x+2R}{4x^2}\sqrt{x}.dx.$$

15. Para

$$y=(r-x)[hx+r(r-x)].$$

es $$dy=r[h-2r]dx-2[h-r]x.dx.$$

16. Para

$$y=\pi x^2\frac{h[r-x]}{r},\qquad \text{es}\qquad dy=\pi hx\left[2-\frac{3x}{r}\right].dx.$$

17. Para

$$y=-\frac{1}{b(a+bx)},\qquad \text{es}\qquad dy=\frac{dx}{(a+bx)^2}.$$

18. Para

$$y=-\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}},\qquad \text{es}\qquad dy=\frac{x\,.\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}.$$

19. Para

$$y=\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}},\qquad \text{es}\qquad dy=\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}.$$

20. Para

$$y=\frac{1}{b}.\sqrt{a+bx^2},\qquad \text{es}\qquad dy=\frac{x.dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

21. Para

$$y=x^2+\frac{a^2c^2}{4x^2}-ac.\cos b\sqrt{x},$$

es $$dy=[2x+\frac{1}{2}(a^2c^2x^{-3}-\frac{ac.\cos b}{x}.\sqrt{x})].dx.$$

22. Para

$$y=x\sqrt{tx-x^2}, \quad \text{es} \quad dx=\frac{3tx-4x^2}{2\sqrt{tx-x^2}}.dx.$$

23. Para

$$y=\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{es} \quad dy=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})^2}.$$

24. Para

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{es} \quad dy=\frac{x.dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

25. Para

$$y=(a+\sqrt{x})^3, \quad \text{es} \quad dy=\frac{3(a+\sqrt{x})^2.\sqrt{x}}{2x}.dx.$$

26. Para

$$y=(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}})^4, \quad \text{es} \quad dy=\frac{4c(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}})^3}{x^3\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}}.dx.$$

27. Para

$$y=\frac{3bx-4x^2}{2\sqrt{bx-x^2}}, \quad \text{es} \quad dy=\frac{(3b^2-12bx+8x^2)x}{4(bx-x^2)^{3/2}}\,dx.$$

28. Para

$$y=\frac{4x^4-a^2c^2}{4x^3\sqrt{x^2+\frac{a^2c^2}{4x^2}}},\quad \text{es } dy=\frac{1}{8}\cdot\frac{12a^2c^2x^4+a^4c^4}{x^6\left(x^2+\frac{a^2c^2}{4x^2}\right)^{3/2}}\,.dx.$$

29. Para

$$y=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},\quad \text{es}\quad dy=-\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,.dx.$$

30. Para

$$y=\frac{x+v}{z^3},$$

dependiendo x, v, z de la misma variable, resulta

$$dy=\frac{z(dx+dv)+3(x+v)}{z^4}.$$

31. Para

$$y=\frac{x}{x+\sqrt{1-x^2}},\quad \text{es } dy=\frac{1}{(1+2x\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}\,.dx.$$

32. Para

$$y=\frac{x^n}{(1+x)^n},\quad \text{es}\quad dy=\frac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}\,.dx.$$

33. Para

$$y=\frac{1+x^2}{1-x^2},\quad \text{es}\quad dy=\frac{4x}{(1-x^2)^2}\,.dx.$$

34. Para

$$y=\frac{1}{x}, \quad \text{es} \quad dy=-\frac{dx}{x^2}.$$

35. Para

$$y=\frac{1}{x^n}, \quad \text{es } dy=-\frac{n}{x^{n+1}}.dx.$$

36. Para

$$y=a^6+3a^4x^2+3a^2x^4+x^6, \quad \text{es} \quad dy=6[a^2+x^2]x.dx.$$

37. Para

$$y=[ax+x^2]^2, \quad \text{es} \quad dy=2[ax+x^2][a+2x].dx.$$

38. Para

$$y=[x^3+a][3x^2+b], \quad \text{es} \quad dy=[15x^4+3bx^2+6ax].dx.$$

39. Para

$$y=\frac{[x-1]^{5/2}[x-3]^{13/2}}{[x-2]^8},$$

es

$$dy=\frac{[x^2+4][x-1]^{3/2}[x-3]^{11/2}}{[x-2]^9}.dx.$$

40 Para

$$y=\frac{[x-1]^{1/2}}{[x-2]^{1/3}} \quad \text{es} \quad dy=\frac{1}{6}\frac{x-4}{[x-1]^{1/2}[x-2]^{4/3}}.dx.$$

(Continuará)