TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS

EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

CALCULO DIFERENCIAL

LIBRO I

PRINCIPIOS GENERALES

DE

DIFERENCIACION

I

DE LA DERIVADA PRIMERA Ó COCIENTE DIFERENCIAL

(Continuación de la página 84, Nº 96.)

15. **FORMA DIFERENCIAL.**—Por la P. I, nº 35, sábese que UNA FUNCIÓN ANTES DEL LÍMITE DIFERIRÁ DE ÉL EN UN VALOR INFINITAMENTE PEQUEÑO, Ó SEA EN UNA

INFINITÉSIMA; luego siendo ε una magnitud de esta clase, que se anula con Δx, por ser

$$\text{lím.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx},$$

se verificará antes del límite

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}+\varepsilon; \qquad [a]$$

luego, mientras Δy, Δx conserven un cierto valor por pequeño que sea, también ε conservará un valor análogo; así que la ecuación (a) es verdadera para las cantidades en ella contenidas; y reales las trasformaciones á que se sujete: será por tanto,

$$\Delta y=\frac{dy}{dx}\Delta x+\varepsilon\,\Delta x$$

una ecuación verdadera entre dichas magnitudes; luego será también verdadera en el límite; y así

$$dy=\frac{dy}{dx}\,dx+\text{lím.}\ \varepsilon\, dx=f'(x)dx+\text{lím.}\ \varepsilon\, dx;$$

pero, como dx lím. ε es una infinitésima del segundo orden, ó dx lím. $\varepsilon = 0$ relativamente á dy, dx [P. I, nº 55], resulta, en fin,

$$dy=\frac{dy}{dx}\,dx=f'[x]\,dx, \qquad [6]$$

forma llamada *la diferencial de una función;* y dice:

LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN ES IGUAL AL COCIENTE DIFERENCIAL DE LA MISMA, MULTIPLICADO POR LA DIFERENCIAL DE LA VARIABLE.

16. **COEFICIENTE DIFERENCIAL.**—La diferenciación de una función puede expresarse, según lo que precede, bajo las formas

$$\frac{dy}{dx}=f'(x), \qquad \frac{dy}{dx}\,dx=f'(x)\,dx; \qquad [b]$$

como los autores que tratan de análisis, confunden frecuentemente los términos COCIENTE DIFERENCIAL y COEFICIENTE DIFERENCIAL, hacemos notar que $f'[x]$ sólo puede llamarse COEFICIENTE DIFERENCIAL si se considera la segunda forma de las [b]; porque, á la verdad, se halla en ésta, como factor ó *coeficiente de la diferencial dx*. Nótese pues, que *cociente diferencial*, *coeficiente diferencial* son conceptos en algún modo distintos; y conviene fijar bien la idea para evitar confusiones que impidan ver con claridad los resultados: la forma primera de las [b] dice, que *la derivada de una función es igual á la razón entre la diferencial de la función y la diferencial de la variable*, razón que no puede ser otra cosa que un cociente, muchas veces con valor finito, como lo veremos á poco; en la segunda forma, $f'(x)$ modifica una infinitésima para producir ótra: es un verdadero coeficiente; y sólo en este caso *es tal coeficiente.*

17. **OTRA FORMA DE LA DIFERENCIAL.**—Si una función continua, como

$$y=f[x], \qquad [c]$$

recibe un incremento muy pequeño, el nuevo cambio ó estado se sabe que se expresa por

$$y_1 = f[x+\Delta x],$$

siendo y_1, y dos valores consecutivos de la función supuesta. El incremento mismo tiene la forma

$$\Delta y=y_1 - y=f[x+\Delta x] - f[x];$$

y como se verifica, por lo visto en el nº 12,

$$dy=\text{lím. } \Delta y=0;$$

resulta, en el límite,

$$dy = \text{lím.}\Delta y = \text{lím.}[y_1 - y] = \text{lím.}[f(x+\Delta x) - f(x)] = 0, \quad [7]$$

nueva forma de la diferencial; y dice: LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN, EN EL MÁS SIMPLE CONCEPTO, ES LA DIFERENCIA ENTRE DOS VALORES CONSECUTIVOS DE LA MISMA, DIFERENCIA QUE, SEGÚN LA LEY DEL CAMBIO Á QUE ESTÁ SUJETA LA FUNCIÓN, TIENDE Á DISMINUIRSE HASTA SER IGUAL Á CERO.

18. FORMA COMPLETA DE LA FUNCION.—Ahora se trata de inquirir, como una consecuencia de lo expuesto, la forma completa de la función cuando recibe un incremento; esto es, el desarrollo más simple y elemental de

$$y_1 = f[x+\Delta x].$$

Recordemos con este fin, que el incremento de

$$y = f[x] \qquad [d]$$

es

$$\Delta y = f[x+\Delta x] - f[x],$$

diferencia que, por lo visto en la ecuación [7], se anula ó reduce á cero; luego tiene de expresarse tal diferencia por un producto de dos factores, uno de los cuales desaparece ó se hace igual á cero en el límite; pero en la función dada sólo Δx cumple con la condición de anularse en este caso; luego será Δx uno de los dos factores; y si lo llamamos F el ótro, resultará evidentemente,

$$\Delta y = f[x+\Delta x] - f[x] = F\Delta x. \qquad [e]$$

Ahora bien, por razón del incremento, el nuevo valor y_1 de la función, tiene de serlo de x y el incremento; luego la diferencia $y_1 - y$ será también una función de éstos; y así, el producto $F\Delta x$. Mas Δx, como variable independiente, no puede ser esa función; y habrá de serlo el otro factor F, que, en forma muy general, puede expresarse por $f[x, \Delta x]$: se tendrá así

$$\Delta y = y_1 - y = f(x+\Delta x) - f(x) = F\ \Delta x = f(x,\ \Delta x)\ \Delta x;$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = F = f(x,\ \Delta x). \qquad [f]$$

expresión que, según el nº 9, se reduce á $f'[x]$ en el límite; luego antes de él, diferirá de su valor en una infinitésima ó cantidad que se anula en ese límite; lo que quiere decir, que $f(x,\ \Delta x)$ tiene de ser una suma, cuyos sumandos serán $f'(x)$ y ótro, función de $x, \Delta x$; el cual, por desaparecer, estará multiplicado por Δx: sea, pues, $f''(x,\ \Delta x)\ \Delta x$ este sumando; resultará de (f),

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{\Delta x} = f(x,\ \Delta x) = f'(x) + f''(x, \Delta x)\ \Delta x, \qquad (g)$$

forma particular del cociente completo que se obtiene dividiendo el incremento de la función por el de la variable; y se sigue

$$y_1 - y = [f'(x) + f''(x,\ \Delta x)\ \Delta x]\Delta x$$

$$= f'[x]\ \Delta x + f''(x,\ \Delta x)\ \Delta x^2,$$

ó $$y_1 = y + f'[x]\Delta x + f''[x,\ \Delta x]\Delta x^2;$$

ó, en fin,

$$y_1 = f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\ \Delta x + f''(x,\ \Delta x)\ \Delta x^2 \qquad [8]$$

la forma que nos proponíamos encontrar; y manifiesta la relación que existe entre dos valores consecutivos y_1, y de la función antes del límite, originados por recibir ésta un incremento ó cambiar de estado.

Se infiere pues, que cuando una función continua pasa de un estado de valor á ótro por recibir la variable un incremento muy pequeño, consta el nuevo valor:

1º, DE LA FUNCIÓN PRIMITIVA; 2º, DE UNA FUNCIÓN DE LA MISMA VARIABLE, COEFICIENTE DEL INCREMENTO LINEAL, Ó DE LA PRIMERA POTENCIA DEL INCREMENTO; Y 3º, DE OTRA FUNCIÓN QUE LO ES, Á UN TIEMPO, DE LA MISMA VARIABLE Y DEL INCREMENTO LINEAL, COEFICIENTE DE LA SEGUNDA POTENCIA DE ÉSTE.

Notas

1ª Se tiene de [g] ú [8],

$$\frac{dy}{dx}=\text{lím. } f(x, \Delta x)=\text{lím. } [f'(x)+f''(x, \Delta x)\ \Delta x]=f'(x);$$

esto es, que el coeficiente del segundo término de la ecuación [8], es el *cociente diferencial ó derivada primera de la función;* y que en el límite de la razón respectiva, *desaparece el tercer término.*

2ª En la misma ecuación es, como ya se ha dicho [nº 9], f'[x] generalmente una función de x; pero si f'[x] fuera una cantidad constante, no existiendo entonces razón de variabilidad, tampoco la habría para la existencia ulterior de incremento alguno; por lo que sería cero el tercer término. Sin embargo, puede haber casos en que, siendo una función el segundo, sea constante el tercero.

3ª La ecuación [8] es completa respecto de la derivada primera, única que hasta ahora es conocida; pero estudiada que sea la *diferenciación sucesiva* ó *superior*, veremos que esta misma ecuación puede contener un número infinito de términos.

4ª La operación pues, en virtud de la cual se determinan los cocientes diferenciales ó derivadas, se llama *diferenciación.* Por lo que, como un resumen de todo lo expuesto, añadimos:

DIFERENCIACIÓN ES LA OPERACIÓN EN VIRTUD DE LA CUAL SE DETERMINA LA DERIVADA Ó DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN; esto es: EL VALOR dy DE y, CUANDO x CRECE DE SU DIFERENCIAL dx.

EJEMPLOS

1º Hallar la derivada primera de

$$y = mx + 3x + d.$$

Res.ⁿ Dando un incremento á la variable, resulta

$$y_1 = y + \Delta y = m[x + \Delta x] + 3[x + \Delta x] + d$$

$$= mx + 3x + d + [m + 3]\Delta x;$$

y así

$$\Delta y = y_1 - y = [m + 3]\Delta x;$$

ó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m + 3,$$

ó, finalmente,

$$\frac{dy}{dx} = \text{lím.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'[x] = m + 3,$$

cantidad constante, como se ha dicho varias veces [números 13 y 16].

2º Hallar la derivada de

$$3 + y = x^m + cx^3, \text{ ó } y = x^m + cx^3 - 3.$$

Res.ⁿ En virtud de procedimientos análogos á los del ejemplo 1º, tendremos:

$$y_1 = [x + \Delta x]^m + c[x + \Delta x]^3 - 3$$

$$= x^m + m x^{m-1} \Delta x + \frac{m[m-1]}{1 \times 2} x^{m-2} \Delta x^2 + \ldots\ldots$$

$$+cx^3 + 3cx^2\,\Delta x + 3cx\,\Delta x^2 + c\,\Delta x^3 - 3,$$

ó $$\Delta y = mx^{m-1}\,\Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} x^{m-2}\,\Delta x^2 + \ldots\ldots$$

$$+3cx^2\,\Delta x + 3cx\,\Delta x^2 + c\,\Delta x^3,$$

ó $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m[m-1]}{1 \times 2} x^{m-2}\,\Delta x + \ldots\ldots$$

$$+3cx^2 + 3cx\,\Delta x + c\,\Delta x^2,$$

ó $$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} + 3cx^2 = (mx^{m-3} + 3c)x^2:$$

excepto estos dos términos, los demás desaparecen, por ser lím. $\Delta x = 0$; así que la expresión última es la derivada que se busca, la cual, como se nota, es una nueva función.

3º Sea la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0,$$

que corresponde á la elipse ó hipérbola, según que

$$a^2 - e^2 \gtrless 0.$$

RES.[n] Tendremos en el primer estado ó valor de la función,

$$y^2 = (a^2 - e^2) - \frac{a^2 - e^2}{a^2} x^2 ;$$

y así, en el segundo,

$$(y + \Delta y)^2 = (a^2 - e^2) - \frac{a^2 - e^2}{a^2} (x + \Delta x)^2 ,$$

ó
$$y^2 + 2y\,\Delta y + \Delta y^2 = (a^2 - e^2) - \frac{a^2 - e^2}{a^2} x^2$$
$$- \frac{a^2 - e^2}{a^2} (2x + \Delta x) \Delta x ;$$

por lo que será la diferencia de valores ó el incremento de la misma,

$$\Delta y = - \frac{a^2 - e^2}{2a^2 y} (2x + \Delta x) \Delta x - \frac{\Delta y^2}{2y} ,$$

ó
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{a^2 - e^2}{2a^2 y} (2x + \Delta x) - \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2y} ;$$

y como

$$\text{lím. } \Delta x = 0, \quad \text{lím. } \frac{\Delta y}{2y} = 0,$$

resulta al fin,

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{a^2 - e^2}{2a^2 y}\, 2x = - \frac{(a^2 - e^2) x}{a^2 y} ,$$

que es la derivada de la ecuación: la diferencial, según [6], será

$$dy = -\frac{(a^2 - e^2)x}{a^2 y} dx;$$

y si $a^2 - e^2 = b^2$,

$$dy = -\frac{b^2 x}{a^2 y} dx$$

será la diferencial de la ecuación de la elipse; pero si $a^2 - e^2 = -b^2$,

$$dy = \frac{b^2 x}{a^2 y} dx$$

será la diferencial de la ecuación de la hipérbola.

II

SIGNIFICACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA PRIMERA

20. **TEOREMAS FUNDAMENTALES.**—Lo indicado en el nº 10 manifiesta que una función puede tener diferentes derivadas; y después veremos que á cada una correspon-de una significación geométrica especial. Al presente sólo tratamos de inquirir la significación de la derivada primera

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$

referida á la extensión lineal, superficial y volumétrica. Tal significación se descubre por los siguientes

Teoremas

I. El cociente diferencial ó la derivada primera que se obtiene de la ecuación de una curva plana, **es la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente geométrica á un punto cualquiera de la curva, forma con el eje de abscisas.**

Decimos, que si es ATB una curva plana referida á un sistema Ox, Oy (fig. 3) de ejes rectangulares; y TR, la tangente á la curva en el punto T, á que corresponde la ordenada

$$y=TP=f(x),$$

línea tangente que hace con el eje de abscisas el $\sphericalangle \tau$; considerando entonces un arco TT′ muy pequeño, limitado por la ordenada $y_1=T'P'$, la razón última de los incrementos simultáneos Δy, Δx, respecto de las coordenadas de T, se expresará por

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=tg.\ \tau.$$

Demos.n A partir de la ordenada fija TP, la variable T′P′ determina los incrementos $\Delta x=PP'=TS$, $\Delta y=T'S$; de manera que las nuevas coordenadas son $OP'=x+\Delta x$, $T'P'=y+\Delta y$; por lo cual

$$y_1=y+\Delta y=TP+T'S=f(x+\Delta x)$$

ó $$\Delta y = y_1 - y = T'S = f(x+\Delta x) - f(x),$$

ó $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T'S}{TS} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \qquad \text{(h)}$$

expresiones todas, en las cuales Δy se anula con Δx. Ahora bien, uniendo T y T', la secante TT' forma con el eje de abscisas el $\sphericalangle \alpha$; y del triángulo rectángulo T'ST sale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x} = \frac{T'S}{TS} = \text{tg. } \alpha.$$

Si pues, disminuyen más y más Δy, Δx, ó si el punto T' se acerca indefinidamente á T; la secante TT' tenderá á tomar la posición fija de la tangente UR á la curva en el punto T; y el $\sphericalangle \alpha$, á coincidir con el $\sphericalangle \tau$, que, como se ha indicado, forma dicha tangente con el eje de las x: en el límite mismo, la secante se confundirá con la tangente, resultando $\sphericalangle \alpha = \tau$; luego

$$\frac{dy}{dx} = \text{lím. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \text{tg. } \tau. \qquad (9)$$

L. Q. D. D.

Nota.—La diferencial será

$$dy = \text{tg.}\tau\, dx \qquad (10)$$

Corolarios

1º El cociente diferencial de la magnitud de una recta ó de la variable, que representa siempre una recta, es igual á la unidad.

Debe ser, para la magnitud ó recta x,

$$\frac{dy}{dx}=1.$$

DEMOS.ⁿ Porque, para la magnitud lineal ó variable de que se trata

$$y=x,$$

resulta

$$y_1 = y+\Delta y=x+\Delta x, \text{ ó } \Delta y=\Delta x,$$

ó $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1, \text{ ó lím.} \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

ó, finalmente, $$\frac{dy}{dx}=1. \quad \text{L. Q. D. D.} \qquad [11]$$

Así es

$$dy=dx. \qquad [12]$$

Nota.—La forma [11] se contiene evidentemente en la [9]; pues que, siendo $\sphericalangle\tau=45°$, se sigue de [9],

$$\frac{dy}{dx}=\text{tg. } 45°=1,$$

y fija una recta que hace con el eje de abscisas un ángulo de 45°; y, á la verdad, la expresión, supuesto del corolorario,

$$y=x,$$

designa, como se sabe, una recta que pasa por el origen de coordenadas, dividiendo en partes iguales el ángulo de ejes rectangulares: de aquí que la aplicación inmediata del teorema produzca la *(11)*.

2º De conformidad con lo dicho en los números 13 y 17, el teorema establecido demuestra una verdad muy importante, es á saber:

En una función continua, **la razón entre los incrementos de la función y la variable tiende hacia una cantidad determinada, á medida que el incremento de la variable se aproxima á cero.**

II. El cociente diferencial de un área *es la última ordenada*, **ó que limita el área.**

Decimos, que si á partir de la ordenada fija

$$y=PM \text{ [fig. 4]},$$

se considera el área

$$S=PMM'P'=f[x],$$

limitada por la ordenada variable $y'=P'M'$, debe ser

$$\frac{dS}{dx}=y' \text{ [última ordenada]}.$$

Demos.ⁿ Para el incremento $\Delta x=P'P''$ de la variable, será

$$\Delta S=P'M'M''P''=P'M'mP''+M'M''m=y'\,\Delta x+\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\Delta x,$$

ecuación tanto más verdadera, cuanto más pequeña sea Δx: ε desaparece pues, con Δx. Así resulta

$$\frac{\Delta S}{\Delta x}=y'+\tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{ó} \quad \frac{dS}{dx}=y'. \qquad \text{L. Q. D. D.} \qquad (13)$$

Nota.—Ya se sabe que lím. $\frac{1}{2}\varepsilon=0$. Es además,

$$dS=y'\,dx. \qquad [14]$$

III. El cociente diferencial de un volumen es la última sección plana, ó que limita el volumen.

Decimos, que si á partir del plano yz (fig. 5), se considera el volumen

$$V=AOBMPN=f(x),$$

limitado por los planos xy, xz, yz, la superficie lateral y la variable

$$S=MPN,$$

debe ser

$$\frac{dV}{dx}=S \text{ (última sección plana).}$$

Demos^{n}. Para el incremento $\triangle x=PP'$ de la variable, el volumétrico será

$$\triangle V=MPNM'P'N'=S\,\triangle x+\tfrac{1}{3}\,\triangle S\,\triangle x+\tfrac{1}{3}\varepsilon\,\triangle x,$$

ecuación tanto más verdadera, cuanto más pequeña sea $\triangle x$: ε y $\triangle S$ desaparecen con $\triangle x$; y ε significa la pequeñísima superficie por la que, positiva ó negativamente, puede diferir el volumen $\frac{1}{3}\triangle S\,\triangle x$ del que realmente corresponde al incremento anular M'M''N''N'NM recibido por la extensión volumétrica, y dependiente de la forma que tenga la superficie lateral ABNM. Así resulta

$$\frac{\triangle V}{\triangle x}=S+\tfrac{1}{3}\triangle S+\tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

ó $$\frac{dV}{dx}=S. \quad \text{L. Q. D. D.} \qquad (15)$$

Ya se sabe que lím. $\frac{1}{3}\triangle S=0$, lím. $\frac{1}{3}\varepsilon=0$. Es además

$$dV=S\,dx. \qquad (16)$$

III

CONSIDERACIONES GENERALES

SOBRE LAS DERIVADAS DE LAS FUNCIONES

21. OBSERVACIONES.—La división establecida entre las funciones [P. I, nº 25] hace que tratemos por separado de los cocientes diferenciales, según que se consideren las funciones algébricas y las trascendentes. Ahora nos proponemos inquirir ciertas propiedades generales del cociente diferencial de funciones cualesquiera, dependientes de una sola variable, lo que servirá de preparación para examinar las derivadas de las varias clases de funciones.

(Continuará)