TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD
CENTRAL DEL ECUADOR

INTRODUCCION

AL ESTUDIO DE LAS MATEMATICAS SUPERIORES

1. Ciencias matemáticas.—Se sabe que las CIENCIAS MATEMÁTICAS, *en general consideradas, se proponen estudiar las leyes de la cantidad y la extensión:* de aquí que esta parte de los conocimientos humanos se divida en dos grandes grupos que constituyen las **Ciencias de la Cantidad** y las **Ciencias de la Extensión**. Las que forman el primero, se resumen y encuentran su razón de ser en el Algebra; las que componen el segundo, se identifican con la Geometría: **Algebra** y **Geometría**, tales son los dos grandes ramos de las ciencias matemáticas, llamadas, por antonomasia, **Ciencias Exactas**, á causa de "la exactitud de sus principios y el rigorismo de su método."

Pero estas ciencias se dividen, además, en dos secciones muy importantes. La úna se conoce con el nombre de **Matemáticas puras**, porque *investiga las leyes universales que se fundan en los conceptos puros ó abstractos de la cantidad* y *la extensión:* en este sentido las leyes descubiertas, lo son con independencia de las cualidades de los seres que componen el mundo físico. La otra sección forma las **Matemáticas aplicadas**, *que se proponen conocer las propiedades cuantitativas de los cuerpos, valiéndose, como de medio, de las leyes generales sobre la cantidad y la extensión por aquélla descubiertas:* á esta parte se refieren, por tanto, las cuestiones relativas á la atracción de las masas, como su equilibrio y movimiento; la formación y progación de las ondas sonoras y luminosas, el movimiento vibratorio del éter, el curso de los astros, &ª. Pero en el estudio actual hay que prescindir de esta sección, porque sus reglas son las de aquélla en cuanto cumplen con los fines mencionados.

2. Concepto cuantitativo de la extensión.—Si bien tiene la extensión, como cualidades esenciales, la *forma* y *posición* que jamás pueden ser cantidades; sin embargo, en cuanto á las dimensiones una cierta extensión puede ser mayor ó menor que ótra de la misma especie; por esto es que puede encontrarse en la extensión un cierto concepto cuantitativo, lo mismo que en la cantidad considerada en general: en este sentido las *ciencias de la cantidad* y *las ciencias de la extensión* no pueden ser diferentes, y sólo varía la manera de determinar dicho concepto cuantitativo, ó sea la relación entre la *magnitud comparable* y *la unidad;* pues las ciencias del primer grupo, es decir, las *ciencias algébricas*, proceden por *numeración*, mientras que las *geométricas* lo hacen por *mensura;* de este modo, en el Algebra, llamada también *Aritmética general*, la cantidad es *directa* ó *inmediatamente numerable*, mientras que en la Geometría lo es *mediatamente*.

Esto supuesto, y en el sentido que venimos considerando, las mencionadas ciencias se identifican de nuevo en la manera de determinar las relaciones que ligan entre sí los números, expresión de las cantidades. Mas, si bien puede decirse que es igual la representación simbólica, varía con todo la manera de enunciar una proposición, ya algébrica, ya geométricamente. En efecto,

$$a \times b$$

puede ser un símbolo algébrico ó geométrico, y manifestar, por lo mismo, cierta relación de magnitudes en el Algebra ó la Geometría; pero en la primera, el lenguaje ordinario dirá, que aquel símbolo *representa el producto de dos números;* y en la segunda, *el producto de dos líneas* ó, mejor dicho, *un área.*

Que en las *ciencias de la extensión*, y en cuanto se considera el *concepto cuantitativo*, es numérica la relación de las magnitudes, es cosa clarísima; pues no puede conocerse una línea, área ó volumen sino mediante el valor de dicha línea, área ó volumen, que *es la relación de sus magnitudes respectivas con la unidad;* ó, lo que es lo mismo, *mediante el número.*

Luego, en el Algebra inmediatamente y mediatamente en la Geometría, el concepto cuantitativo de la magnitud tiene la misma significación matemática; y así la determinación de la cantidad por la unidad, que se dice, según los casos, *contar* ó *medir*, produce solamente *el número.*

3. Las Matemáticas con relación al número.—Si pues, *el número* es el objeto final de las *Ciencias de la cantidad* en el estudio de la *cantidad discreta*, como en el de la *extensión*, considerada sólo en lo que es cuantitativa, esto es, en cuanto *á las dimensiones*, las cuales determinan la *cantidad continua;* claro es que las Matemáticas, al estudiar las cantidades componiéndolas, descomponiéndolas y comparándolas, se proponen descubrir las diferentes maneras como aparecen los números, é investigar sus propiedades por la naturaleza de su generación y las relaciones que entre ellos pueden existir.

4. Matemáticas elementales y superiores.—Para cumplir con este fin las Matemáticas estudian las magnitudes cuantitativas de dos maneras: ó consideran los individuos que forman las relaciones numéricas, mejor dicho, las unidades, como seres más ó menos grandes; es decir, como entidades ya formadas, tangibles, por decirlo así, ó de un valor *comparable;* ó se ocupan de dichos individvos suponiéndolos compuestos de partes muy pequeñas, que tienen un valor, como si se dijera, *ideal;* pues no son susceptibles de comparación con ótros de magnitud más ó menos considerable: tales partes se denominan *elementos.* En este caso, la inteligencia con sólo su poder, y sin ningún auxilio *ad extra* diremos, que le facilite el estudio, investiga *los conceptos abstractos* de tales elementos: nada físico y tangible hay entonces; la cuestión se coloca sobre lo físico–susceptible de comparación determinada–, y tal estudio no es otra cosa que la *Metafísica–Matemática*, conocida con el nombre de Matemáticas sublimes, y que, con más propiedad, puede llamarse Teoría de las Funciones, como ya lo explicaremos.

Las Matemáticas, procediendo del primer modo, se denominan *Elementos* ó *Inferiores;* y así:

Matemáticas Elementales ó Inferiores, *son las ciencias que estudian las leyes generales de la cantidad y la extensión considerándolas como entidades compuestas de individuos determinados; esto es, sin referirse á los elementos ó últimas partes de los mismos.*

Las reglas de las *Matemáticas elementales* se aplican á los individuos que hemos indicado, sin saber si las partes de ellos, separadamente consideradas, quedan sujetas á las relaciones por aquellas reglas obtenidas.

En la *Aritmética*, el *Algebra*, la *Geometría* y *Trigonometría elementales* no se consideran de otro modo la *cantidad* y la *extensión*, aunque las dos últimas partes, de cuando en cuando y para ciertas deducciones, ya examinan, en algún sentido, los elementos de las individualidades.

Además, el símbolo

$$a \times b,$$

uno de los frecuentemente empleados en las Matemáticas elementales. nada dice, por sí solo, diferente del producto que los caracteres señalan; es decir, en dichò símbolo el entendimiento no percibe más que la operación por esta forma indicada: hay pues, verdadera relación entre el *fondo*–el pensamiento ó idea que se trata de representar–y la *forma* por medio de la cual se representa; y hasta aquí nada hay de sublimidad, ni aun en el simbolismo empleado.

Por el contrario:

Las Matemáticas Sublimes ó sea la Análisis Superior, ó Teoría de las Funciones, *estudian las leyes generales de la cantidad y la extensión, analizando sus últimos elementos, y determinando las relaciones que estos elementos guardan entre sí.*

Por tanto, si de la *investigación, distinción y comparación* de los elementos dichos, la *Análisis superior* viene en conocimiento de los individuos determinados que forman la cantidad y la extensión; siendo aquéllos, según lo expuesto, muy pequeños, se hace necesario considerar constantemente para tal síntesis, un número *muy grande* de elementos. En este caso las Matemáticas sublimes comprenden, tanto el estudio de las relaciones entre aquellos elementos, como el de las obtenidas entre los individuos determinados que así resultan; y, como únas y otras relaciones necesitan de formas especiales, ambas comprenden ya todas las formas posibles. En este sentido es aceptable la definición que el Sr. Herr da de las Matemáticas superiores á saber:

Las Matemáticas Superiores ó Análisis *se ocupan en la consideración de todas las formas en que se presentan las relaciones que existen entre las cantidades numéricas.* [1]

Tal definición parece excluir de la Análisis superior

1 Herr: Lehrbuch Der Höheren Mathematick. T. I, pág. 3.

las *ciencias de la extensión;* mas, como éstas, por lo dicho (nº 2 y 3), comprenden asimismo un concepto cuantitativo, y, por tal causa, susceptible de relaciones numéricas; es manifiesto que dicha definición abraza también las ciencias que exponen las leyes de la extension, cuando proceden por el estudio de los elementos. Es indudable por otro lado, y según lo manifestaremos á poco, que en la ciencia geométrica hay teorías que no se pueden considerar sino como partes ó secciones de las Matemáticas sublimes.

5. Caracteres de sublimidad.—1º Nada más lógico que el procedimiento de las Matemáticas superiores: conocidos los individuos, no se conoce, sin embargo, la naturaleza de las partes ó elementos que los forman; por el contrario, si se conocen la naturaleza, las leyes, las relaciones de dichos elementos, pueden quedar bien definidas las propiedades de los *individuos compuestos:* basta al efecto observar la manera como se unen las partes. Tal operación es conforme con el axioma:

"El todo tiene por naturaleza la de sus partes."

2º Entre el conocimiento de las Matemáticas superiores y el de las elementales hay la diferencia que va de conocer á un ente, ó individuo, por *sus propiedades intrínsecas* y sólo *sus manifestaciones externas:* es evidentemente superior el conocimiento acerca de un libro por saber lo que contiene, que el adquirido con sólo la vista del mismo.

3º Si x, por ejemplo, designa una cierta cantidad; un elemento muy pequeño de la misma, tal cual se considera en la análisis, se expresa por

$$\Delta x,\ dx:$$

las características Δ, d que preceden al todo ó individuo del cual dicho elemento se toma, y con las que se representan los conceptos denominados *infinitamente pequeños*, ó *infinitésimas*, y *diferenciales*, designan, además, un *modo de sér* de dicho elemento, su cambio en ótro ú ótros, la ley, en fin, con que varios elementos se relacionan, ya para permanecer separados, ya para unirse y formar un todo determinado, reunión que, de un modo especial, se señala en la ciencia con el símbolo

$$\int,$$

inicial de la palabra *suma*, y que es llamado la *integral de los elementos.* Los valores de las magnitudes dependientes del de sus elementos, la relación entre éstos, la razón de sus decrementos sucesivos ó adiciones respectivas, todo, todo se designa con el símbolo, que podemos llamar sintético,

$$y = f(x) \qquad (1)$$

Se deduce, pues, que los símbolos

$$\Delta x, \; dx, \; \int, \; f(x),$$

denotan relaciones de un orden muy elevado; y por esto, las Matemáticas que los emplean se dominan **superiores**; la *idea matemática* que con dichos símbolos se manifiesta es superior, en mucho, al simbolismo empleado; el fondo excede ó es superior á la *forma*, y aun por esta razón se denominan con propiedad **Matemáticas sublimes** las ciencias que de ellos se valen.

6. Dependencia entre los elementos. Tales elementos al relacionarse entre sí para manifestar las propiedades de la *cantidad* y la *extensión*, lo hacen influyendo los únos en los ótros, de modo que un cambio, en algún sentido, verificado en aquéllos produce un cambio ó variación determinada en éstos; y el carácter que así liga á los indicados elementos se designa en la ciencia con la palabra *función.* Si entre los elementos dichos, no hubiera la relación de cambio en los *únos* por los cambios verificados en los *ótros*, el estudio de tales formas (n.º 4, 2.ª definición), sería imposible; porque seres sin relación alguna carecen de unidad; y, siendo diferentes, nada producen. Luego, si las partes ó los elementos de las cantidades alguna cosa dan, á saber, *las cantidades mismas*, es real la relación indicada; y el estudio de tales formas simbólicas con las ideas á que están ligadas, es el estudio de las funciones. Por tanto, la reunión de todos los principios y consecuencias que constituyen el **Cálculo sublime**, no puede ser menos que una **Teoría**: he aquí por qué la ciencia que vamos á estudiar puede con toda propiedad llamarse **Teoría de las Funciones.**

7. Definiciones.—Entre los elementos que, como se ve, pueden también ser llamados cantidades, pues partes de éstas son, hemos dicho que las variaciones de únos producen cambios ó variaciones en ótros; pero es claro que el origen de tales cambios ha de estar arbitrariamente en algunos de ellos, sin referencia á los ótros; mas, verificadas dichas variaciones en los primeros, por la ley de relación se han de verificar también en los segundos. Además, puede haber cantidades que no sufran cambio alguno. Cuando en las formas respectivas ocurran casos semejantes, tenemos las siguientes denominaciones:

Cantidad variable, *ó simplemente* **variable,** *es la magnitud que, en la cuestión en que se considera, es susceptible de tomar, por lo general sucesivamente, diferentes valores:* **variables independientes ó arbitrarias** *son las que reciben valores arbitrarios, esto es, sin relación ó sujeción á cantidad alguna;* mas, se llaman **variables dependientes** *las que cambian de valor por las arbitrarias variaciones de aquéllas.* Se denominan **constantes** *las cantidades que, en la misma cuestión, no cambian de valor.*

Función *es la forma ó expresión matemática que tiene dos ó más variables de tal modo ligadas, que todo cambio en las únas produce un cambio ó variación en las ótras.*

Y como, en tal forma ó expresión, siempre puede darse una de estas cantidades por las otras variables y las constantes, designaremos en todo lo que sigue, para más sencillez, con la palabra **función** la variable ó variables *dependientes*, y llamaremos **variable** simplemente, la *variable independiente.*

Como ejemplos de funciones podemos citar los siguientes:

1º Si á un colono ó labrador se le ofrece el premio a por su trabajo diario; y si, además, se le retribuye con el salario m por cada unidad superficial de terreno que elabore, la expresión que dé el jornal total y, para x unidades elaboradas, será

$$y = mx + a; \tag{2}$$

en la cual, y es la función, x la variable, a y m cantidades constantes.

2º La Geometría elemental suministra también varios ejemplos de funciones: tales son, entre ótros,

$$C = 2\pi r, \qquad A_c = \pi r^2, \tag{3}$$

que expresan, respectivamente, la longitud de la circunferencia y el área del círculo, como funciones de la variable r radio.

8. Idea del límite.—Desde el momento que una función pueda variar, es claro que ha de recibir valores diferentes; pero semejante propiedad no ha de ser indefinida: algo ha de haber que le ponga un término, y cuando esto se cumpla, la función adquirirá en verdad, un valor propiamente determinado; es decir, un valor tal que para ella es invariable, ó no puede cambiar; y este valor tiene la naturaleza del que hemos llamado *constante* [nº 7]. Cuando las funciones se encuentran en este caso, se dice que llegan al *límite*, ó que han alcanzado un *límite.*

Mas, como la variación de las funciones depende de los cambios efectuados en las variables; se deduce, que tomando éstas un valor *constante*, aquéllas no pueden ya *variar:* tal condición generalmente se verificará cuando las variables adquieran ó reciban valores absolutos más allá de los cuales no hay ótros; pero se sabe que los únicos números absolutos más allá de los cuales no hay ótros, son *cero* y el *infinito;* luego, hacia ésto únicamente pueden tender las variables, para que las funciones lleguen ó alcancen á tener un límite, ó adquieran un valor *invariable:* éste puede ser cualquiera, luego

Límite de una función es el valor que recibirá cuan- o la variable tienda á cero ó se acerque al infinito

Así, por ejemplo, la función

$$y = \frac{a}{x^2},$$

para los valores de la variable

$$x = \begin{cases} 0, \\ \infty; \end{cases}$$

tiene por límites

$$y = \begin{cases} \infty, \\ 0. \end{cases}$$

Como, por medio de las funciones, las Matemáticas se proponen adquirir una idea ó, tal vez, representar lo que se verifica en el mundo físico; y como en éste *Natura non facit saltus,* según el aforismo de las antiguas escuelas, claro es que las variables sucesivamente, y por grados, se han de acercar á *cero* ó al *infinito;* de aquí es que, por lo regular, las funciones se acercarán también, por grados y sucesivamente, al valor límite; y decimos *por lo regular,* porque alguna vez acontece que el tránsito se verifica bruscamente, y es el caso de *discontinuidad,* llamado también *solución de continuidad* [1] *de las funciones.*

1 Aunque esta forma ó expresión está censurada por los ebunos hablistas, la ciencia la ha consagrado.

Esto supuesto, si una función se acerca sucesivamente á su límite, es claro que en cada momento, cerca de él, la diferencia entre el valor de la función y el del límite se hará menor, ó será cada vez menor; y de este modo, pasando siempre la función á su límite, carácter que constituye la *continuidad de una función*, dicha diferencia terminará por *ser menor que toda cantidad absoluta, determinada ó asignable*. El valor límite, y útil en una función, no se crea, empero, que es el infinito, frecuentemente es un número determinado y constante; y, tanto en este sentido, cuanto por lo que acabamos de expresar, puede también decirse:

Límite de una función *es el valor constante al cual se aproxima indefinidamente, sin llegar nunca á igualarlo.*

Esta aproximación indefinida de las funciones á su límite origina *los elementos* de que ya hemos tratado (nº 4); y da razón de ser á las *infinitésimas*, ó los *infinitamente pequeños* de Leibnitz, bases del **Cálculo superior.**

9. Objeto de las Matemáticas sublimes.—Supuesto que estas ciencias, por medio de las funciones, se proponen estudiar las cantidades con el fin de obtener nuevas leyes y verdades que no pueden ser descubiertas por las *ciencias elementales*, claro es que la **Teoría de las funciones** debe inquirir todas las propiedades de las funciones antes del límite, las que resultan con relación á él y las comparaciones ó relaciones nuevas, que en este sentido se originan. Luego la Teoría de las funciones debe tratar: 1º, *del límite* y *de las propiedades de las funciones con relación á él;* 2º, *del desarrollo de las funciones;* y 3º, *de las razones ó relaciones que se pueden formar entre los incrementos ó cambios de valores de las funciones, originados por los cambios de las variables*, y *los incrementos ó cambios de estas variables.*

10. Clasificación de las Matemáticas superiores.—Las secciones 1ª y 2ª del nº precedente forman la parte que se conoce, entre los modernos, con el nombre de Análisis algébrica; la sección 3ª constituye el **Cálculo sublime** ó **Infinitesmal**, que se subdivide en **Cálculo diferencial** y **Cálculo integral**, denominaciones que se explicarán en los lugares respectivos, conocidas que sean las cuestiones que estudia la *Análisis algébrica*.

11. Ciencias que se fundan en la Teoría de las Funciones.—Los principios de esta **Teoria** se aplican, aun en el campo de las *matemáticas puras:* I. A inquirir ciertas cuestiones especiales en las *ciencias de la cantidad;* y son: 1º, *la resolución y teoría de las ecuaciones, ó Algebra superior;* 2º, *estudios acerca de la constitución íntima de los números y exposición de sus propiedades permanentes, en todos los sistemas posibles de numeración, ó* **Teoría de los números**, llamada también, por Poinsot, **Aritmética trascendental.** II. A investigar ciertas especiales cuestiones en las *ciencias de la extensión;* y, según que predomine, como medio, la parte *gráfica* ó la *analítica*, resultan los tres ramos conocidos con los nombres de **Geometría descriptiva, Geometría analítica** y **Geometría moderna ó superior.**

Es evidente, conforme á lo apuntado en el final del nº 4, que estos tres ramos de la *ciencia geométrica*, lejos de ser secciones de las *Matemáticas elementales*, lo son de las *sublimes;* luego es forzoso concluir, que estas ciencias no limitan sus investigaciones sólo á las *cantidades numéricas*, si se excluyen de este concepto las ciencias de la extensión, en cuanto comprenden relaciones cuantitativas, según lo indicado en los nºs 2 y 3. Por tanto, si la definición del Dr. Herr es verdadera, tiene de aceptarse lo que acerca de ella hemos dicho en el nº 4 citado.

(Continuará).