II

CALCULO INFINITESIMAL

POR EL MISMO PROFESOR

I

CALCULO DIFERENCIAL

LIBRO I

PRINCIPIOS GENERALES DE DIFERENCIACION

V

DIFERENCIACION SUCESIVA O SUPERIOR

(Continuación de la página 91, Núm. 108)

26. **DERIVADAS DE DIFERENTES ORDENES.**—Supuesto que el cociente diferencial hasta ahora considerado, puede ser una nueva función, como ya se ha dicho (números 9 y 10), se lo ha llamado, y con razón, la *derivada primera:* en este caso, por operaciones semejantes á las ejecutadas para encontrarlo, se puede formar de él

otro cociente diferencial, que se denomina la *derivada segunda.* Si esta nueva derivada fuera asimismo una función, operaciones análogas producirían otro cociente diferencial, llamado la *derivada tercera*; y así sucesivamente: el conjunto de las operaciones por las que se determinan las diferentes derivadas de una función, constituye la DIFERENCIACION SUCESIVA O SUPERIOR.

27. **CAMBIO DE RELACION.**—Los teoremas y ejemplos precedentes manifiestan que, después de la diferenciación, los términos de las expresiones resultantes cambian respecto de los que forman la función primitiva, cambio que se hace más notable en aquéllos que contienen potencias de la variable; así que, considerada una cierta forma, la relación entre la función y la variable es diferente de la que existe entre la derivadada primera de la función y la misma variable. Como esto se verifica en todas las derivadas, se puede concluir, que UN MISMO CAMBIO DE LA VARIABLE PRODUCE DIFERENTES CAMBIOS EN LAS FUNCIONES Y SUS DERIVADAS.

28. **SIMBOLOS DE LAS DERIVADAS.**—Sean pues,

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{\text{iv}}(x), \ldots\ldots\ldots,\ f^{[n]}(x)$$

las derivadas de los órdenes 1º, 2º, 3º, 4º, ..., nº respecto de una misma función

$$y = f(x);$$

supuesto que

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x), \qquad \text{(a)}$$

será evidentemente para la derivada segunda

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\,[f'(x)]}{dx} = f''(x); \qquad \text{(b)}$$

y también, recordando lo dicho en el corol. del teor. I, nº 21,

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d(dy)}{dx\,dx}=\frac{d^2y}{dx^2}\,{}^{*}; \qquad [c]$$

ó, por [b] y [c],

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d[f'(x)]}{dx}=f''(x), \qquad [30]$$

que es la forma simbólica ó expresión de la derivada segunda, que se lee: *la segunda diferencial de y relativamente al cuadrado de la diferencial de* x, *ó la diferencial segunda de y sobre la diferencial cuadrada de* x, *es igual á la función segunda de* x.

Por la [30] resultará asimismo para la derivada tercera,

$$y'''=\frac{d\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{dx}=\frac{d[f''(x)]}{dx}=f'''(x);$$

y también

$$\frac{d\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{dx}=\frac{d[d^2y]}{dx^2\,dx}=\frac{d^3y}{dx^3}$$

ó

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=f'''[x]; \qquad [31]$$

que se lee: *la tercera diferencial de y relativamente al cubo de la diferencial de* x, *ó la diferencial tercera de y*

(*) Se ha convenido en expresar $d(dy)$ ó ddy por d^2y, que se dice *la diferencial segunda de y*; mientras que $dx\,dx$ es el producto de dx por dx, ó igual *al cuadrado de la diferencial de x*. Asimismo $d(d^2y)$ se designa por d^3y, que se lee: *la diferencial tercera de y*; &., &.

sobre la diferencial cubada de x, *es igual á la función tercera de* x.

Por iguales consideraciones resultan

$$y^{\text{iv}}=\frac{d^4y}{dx^4}=f^{\text{iv}}[x],\ y^{\text{v}}=\frac{d^5y}{dx^5}=f^{\text{v}}[x],\ldots,y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}[x].$$

Nota.—En todas estas expresiones el índice de las características *d*, *f* designa el grado de la diferenciación; pero el de *dx* en el denominador, es un verdadero exponente, y señala el número de veces que está *dx* como factor.

29. PROCEDENCIA DE LAS DERIVADAS.—Aunque en el número anterior ya se explica la manera de formación ó, con más propiedad, la manera de representar las derivadas de los diferentes órdenes; esto mismo se comprenderá mejor estudiando el modo como proceden de una función para un mismo cambio de la variable. Con este fin obsérvese, que las derivadas ó diferenciales son los límites de las diferencias de valores que recibe una función por los cambios ó incrementos sucesivos de la variable (números 9 y 15): la procedencia de tales valores lo manifiesta el siguiente cuadro, que contiene los varios estados de la variable, los de la función y las diferencias correspondientes.

Valores de la variable	Valores de la función	Difer.s 1.as $\Delta y=y_1-y$	Difer.s 2.as $\Delta^2y=\Delta y_1-\Delta y$	Difer.s 3.as $\Delta^3y=\Delta^2y_1-\Delta^2y$	Difer.s 4.as $\Delta^4y=\Delta^3y_1-\Delta^3y$
x	..y...	..Δy...	.Δ^2y (*)	.Δ^3y....	.Δ^4y...
$x+\Delta x$.	..y_1..	..Δy_1..	.Δ^2y_1..	.Δ^3y_1...	.Δ^4y_1 .
$x+2\Delta x$.	..y_2..	..Δy_2..	.Δ^2y_2..	.Δ^3y_2...	.Δ^4y_2 .
$x+3\Delta x$.	..y_3..	..Δy_3..	.Δ^2y_3..	.Δ^3y_3...	.Δ^4y_3 .
$x+4\Delta x$.	..y_4..	..Δy_4..	.Δ^2y_4..	.Δ^3y_4...	.Δ^4y_4 .
$x+5\Delta x$.	..y_5..	..Δy_5..	.Δ^2y_5..	.Δ^3y_5...	.Δ^4y_5 .
....	....	....	....	....	
....	....	....			

(*) Es $\Delta y_1-\Delta y$ *la diferencia segunda de y*, que se designa por $\Delta\Delta y$ ó Δ^2y. Es asimismo $\Delta^2y_1-\Delta^2y=\Delta^3y$ *la diferencia tercera de y;* &., &.

(Continuará)