TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS

EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

CALCULO DIFERENCIAL

LIBRO I

PRINCIPIOS GENERALES

DE

DIFERENCIACION

III

CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LAS DERIVADAS DE LAS FUNCIONES

(Continuación de la página 182, Núms. 97 y 98)

21. TEOREMAS.—El objeto que nos proponemos se resume en los siguientes

Teoremas

I. El cociente diferencial de una función es **independiente del incremento de la variable, que ha determinado la diferencial de la función.**

Decimos, que

$$f'(x) \text{ es independiente de } \triangle x \text{ ó } dx.$$

Demos.ⁿ 1ª—Todos los ejemplos y teoremas de que hemos tratado hasta aquí, y, en especial, lo visto en el nº 19, manifiestan que al tomar el límite de la razón que constituye el cociente diferencial, por llegar á ser

$$\text{lím. } \triangle x = 0,$$

desaparecen del segundo miembro de las ecuaciones correspondientes los términos que contienen dicho incremento; luego el primer miembro de las mismas ecuaciones no puede depender de una cantidad desvanecida ó anulada.

L. Q. D. D.

2ª Como el cociente diferencial se representa por la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente geométrica á un punto cualquiera de la curva forma con el eje de abscisas (nº 19 teor. I). dicho cociente dependerá sólo de este ángulo, el cual es independiente del incremento de la variable; y resulta de la posición de la línea tangente, según la que tenga el radio en el elemento de la curva que se considere. Luego el cociente diferencial es independiente del incremento aludido.

L. Q. D. D.

Nota.—La tangente á un punto de una curva plana cualquiera es única y fija, por serlo la perpendicular á la recta ó elemento rectilíneo de ese punto, que es, además, el extremo del radio; y en el Libro II, al estudiar lo relativo al *radio de curvatura*, veremos que á una curva cualquiera, ó á partes determinadas de ella, corresponden radios fijos.

Corol. EL INCREMENTO DE LA VARIABLE, LUEGO QUE DETERMINA LA DERIVADA Ó DIFERENCIAL, es constante.

DEMOS.n La expresión

$$dy=f'(x)\,dx \qquad (h)$$

es una ecuación homogénea: los dos miembros expresan infinitésimas del orden primero; y, así como la variación de x originó, de y, la infinitésima dy del primer orden, una nueva alteración de x transformaría la dy en infinitésima del orden segundo, que se expresa por $d^2 y$. Ahora bien, esta misma alteración ó cambio de x produciría de f'(x) una nueva dx, infinitésima del primer orden; y si en (h) cambiara también dx, magnitud de esta orden, resultaría la dx^2, infinitésima del orden segundo, que con la dx originada, por lo dicho, de f'(x), trasformarían el segundo miembro de (h) en infinitésima del orden tercero; y sería una infinitésima del orden segundo igual á ótra del orden tercero, lo que es absurdo. Luego dx en (h) no puede cambiar, ó es una magnitud constante, aunque pequeñísima.

Como se verá después [n.º 30, (i)] una nueva alteración ó cambio de x en (h) produce la diferencial segunda, que se representa por

$$d^2 y=f''(x)\,dx^2 . \qquad (i)$$

Nota.—Pero en (h) puede variar la magnitud dy, originando infinitésimas del orden 2.º, 3.º, &.ª, por ser f'(x), uno de los factores del producto dy, de ordinario una nueva función.

II. LA DERIVADA DE UNA CANTIDAD CONSTANTE es cero.

Decimos, que para

$$y=f(x)=a \text{ (cant. const.)},$$

tiene de ser

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

DEMOS.[n] Según [8][1] se verifica

$$y_1=f+f'\,\Delta x+f''\,\Delta x^2$$

$$=a+0+0,$$

ó $$\Delta y=y_1-y=a-a=0,$$

ó $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0;\ \text{y así}\ \frac{dy}{dx}=0.$$

L. Q. D. D.

Nota. No debe confundirse el *límite* con la *diferencial*.

En efecto, siendo *a* una cantidad constante, se tiene

$$\text{lím. } a=a, \qquad da=0;$$

y es porque la *diferencial* supone variabilidad por incrementos, lo que no puede suceder en una cantidad determinada ó constante: el *límite* mismo se forma por la adquisición de un valor de esta especie [Intro.[n], nº 8]; y ya se ve que una magnitud determinada en cada momento adquiere su propio valor; esto es, queda ó se hace igual á sí misma.

Recíprocamente: SI UNA DERIVADA ES SIEMPRE IGUAL Á CERO, **la expresión de que procede no puede ser sino una magnitud constante.**

Decimos, que si es constantemente

(1) Por sencillez, usando de la fórmula (8), escribiremos f, f′, f″ en vez de f(x), f′(x), f″(x, Δx).

$$\frac{dy}{dx}=0, \quad ó \quad dy=0=0\,dx,$$

debe ser

$$f(x)=a \text{ (cant. const.)}$$

DEMOS.ⁿ Se tiene

$$\text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=0;$$

luego será antes del límite

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0+\varepsilon, \quad ó \quad \Delta y=(0+\varepsilon)\Delta x=\varepsilon\,\Delta x,$$

ó $$f(x+\Delta x)-f(x)=\varepsilon\,\Delta x, \qquad (j)$$

forma general respecto del cambio de la expresión supuesta, de un estado de valor á otro; porque, si constantemente es cero la derivada, constantemente se reproducirá (j); y así, para dos valores cualesquiera x_0, x_1 de x, respecto de los cuales se tenga $x_1 > x_0$, al dividir el intervalo $x_1 - x_0$ en un número n de partes muy pequeñas, iguales á Δx, se verificará

$$x_1 - x_0 = \Delta x+\Delta x+\Delta x+\ldots\ldots=n\,\Delta x;$$

y, por (j), la diferencia entre cada par de valores sucesivos de la función, correspondientes á los incrementos Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x, \ldots\ldots$, $(n-1)\Delta x$, $n\,\Delta x$ de la variable, será

$$\left.\begin{aligned}
f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) &= \varepsilon_1 \triangle x,\\
f(x_0 + 2\triangle x) - f(x_0 + \triangle x) &= \varepsilon_2 \triangle x,\\
f(x_0 + 3\triangle x) - f(x_0 + 2\triangle x) &= \varepsilon_3 \triangle x,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots,\\
f(x_1) - f[x_0 + (n-1)\triangle x] &= \varepsilon_n \triangle x,
\end{aligned}\right\} [k]$$

cuya suma es

$$f(x_1) - f(x_0) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots\cdots + \varepsilon_n)\triangle x;$$

por lo que, siendo ε_s, ε_t las infinitésimas mayor y menor de todos los n sumandos contenidos en el paréntesis, se sigue

$$n\ \varepsilon_s \triangle x > (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots\cdots + \varepsilon_n)\triangle x > n\ \varepsilon_t \triangle x,$$

ó
$$(x_1 - x_0)\,\varepsilon_s > f(x_1) - f(x_0) > (x_1 - x_0)\,\varepsilon_t\ ;$$

y como por las [k], ε_s, ε_t, ... tienden indefinidamente á cero para $\triangle x$ más y más pequeño, resultará en el límite [P. I, nº 42 Lema],

$$f(x_1) - f(x_0) = 0, \qquad ó \qquad f(x_1) = f(x_0).$$

Luego, siendo iguales los valores ó estados de la expresión supuesta f(x), para dos valores cualesquiera x_1, x_0 de la variable, tal expresión no cambia de valor, ó *es una cantidad constante.*

L. Q. D. D.

De otro modo: siendo constantemente por hipótesis,

$$\frac{dy}{dx}=\text{tg. }\tau=0,$$

se sigue

$$\sphericalangle\tau=0;$$

luego, de conformidad con la manera de ser de las curvas, según la concepción de Leibnitz [nº 3], para un punto cualquiera ó elemento rectilíneo infinitamente pequeño de una curva, como aquélla de la figura 3, cuya prolongación puede muy bien decirse que es la tangente en dicho punto, resulta ser ésta paralela al eje de abscisas: igual raciocinio es aplicable al punto ó elemento consecutivo, que tiene con el anterior un punto común; por lo que las dos tangentes, pasando por el mismo punto y siendo ambas paralelas á una misma recta, se confundirán en una sola; y en ésta, los dos elementos. Y como lo mismo vale para el punto ó elemento siguiente; lo mismo para el cuarto, quinto, &ª, las tangentes de todos los puntos ó elementos forman con éstos una sola recta: tal es la razón por qué, en el caso supuesto, la curva de la figura 3 se trasforma en la recta TR ‡ Ox [fig. 6]; y así, que

$$y=f[x]=TP,$$

ordenada invariable para todos los puntos de la recta, sea ciertamente UNA CANTIDAD CONSTANTE.

III. EL COCIENTE DIFERENCIAL Ó DERIVADA DEL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN, **es igual á la constante multiplicada por el cociente diferencial de la función.**

Decimos, que para

$$y=a\ f(x),$$

tiene de ser

$$\frac{dy}{dx}=a\ f'(x).$$

Demosⁿ. Resulta evidentemente

$$y_1=a\ f(x+\triangle x)=a[f+f'\ \triangle x+f''\ \triangle x^2\ ],$$

ó
$$\triangle y=y_1-y=a[f'+f''\ \triangle x]\ \triangle x,$$

ó
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=[f'+f''\ \triangle x];$$

ó, en fin,

$$\frac{dy}{dx}=a\ f'(x). \qquad [17]$$

L. Q. D. D.

IV. Una función decreciente y su derivada, ó diferencial, tienen signos contrarios.

Decimos, que si la forma

$$y=f(x)$$

designa una función decreciente, quiere decir, que disminuye su valor creciendo ó tomando la variable incrementos positivos (P. I, nº 26); deberá ser

$$\frac{dy}{dx}=-f'(x), \qquad ó \qquad dy=-f'(x)\,dx.$$

Demos.ⁿ Es por hipótesis $y_1 < y$, ó

$$\Delta y = y_1 - y = f(x+\Delta x) - f(x) = -[f' + f'' \Delta x]\,\Delta x$$

ó
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -[f' + f'' \Delta x],$$

ó, en fin,

$$\frac{dy}{dx} = -f'(x), \text{ y también } dy = -f'(x)\,dx \qquad (18)$$

Recíprocamente: SI LA DERIVADA Ó EL COCIENTE DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN ES NEGATIVO, **la función es decreciente.**

Si

$$\frac{dy}{dx} = -f'(x)$$

será f(x) una expresión decreciente.

DEMOS.[n] Antes del límite se verificará

$$\Delta y = -[f'(x) + \varepsilon]\,\Delta x;$$

pero como ε puede ser tan pequeña como se quiera, y es Δx positivo, el signo del segundo miembro será siempre menos; y así, negativa siempre Δy; esto es

$$-\Delta y = y_1 - y, \qquad ó \qquad y_1 = y - \Delta y,$$

ó
$$y_1 < y = f(x);$$

luego la FUNCIÓN DECRECE CRECIENDO LA VARIABLE.

L. Q. D. D.

V. DE DOS FUNCIONES CRECIENTES Ó DECRECIENTES, **crecerá ó decrecerá más rápidamente aquélla de las dos, cuya derivada sea mayor en valor absoluto.**

Decimos, que respecto de las dos funciones crecientes ó decrecientes

$$Y=F(x),\ y=f(x),$$

según que sea

$$F'(x) \gtreqless f'(x),$$

se verificará

$$\triangle Y \gtreqless \triangle y.$$

Demos.[n] Antes del límite, restando la una diferencia de la ótra, se halla

$$\triangle Y-\triangle y=[F'(x)+\alpha]\ \triangle x-[f'(x)+\beta]\ \triangle x$$

$$=[F'(x)-f'(x)]\ \triangle x+(\alpha-\beta)\ \triangle x; \qquad [1]$$

pero como $(\alpha-\beta)\triangle x$ se acerca indefinidamente á cero, y es $\triangle x$ una magnitud positiva; según que sea

$$F'(x)-f'(x) \gtreqless 0, \quad ó \quad F'(x) \gtreqless f'(x),$$

se verificará

$$\triangle Y \gtreqless \triangle y;$$

L. D. Q. Q.

y ya se ve que $\triangle Y$, $\triangle y$ miden la magnitud del cambio en cada una de las funciones; ó sea la rapidez con que crecen ó decrecen.

Corol. Luego, si

$$F'[x]=f'[x],$$

será

$$\triangle Y=\triangle y;$$

esto es: SI LAS FUNCIONES SON CRECIENTES Ó DECRECIENTES Y TIENEN IGUALES LAS DERIVADAS, **crecerán ó decrecerán con la misma rapidez.**

Recíprocamente: DE DOS FUNCIONES CRECIENTES Ó DECRECIENTES, **tendrá mayor incremento en valor absoluto aquélla de las dos que crezca ó decrezca más rápidamente.**

Porque, si

$$\triangle Y \gtrless \triangle y,$$

será, por [l],

$$F'[x] \gtrless f'[x].$$

L. Q. D. D.

VI. SI SON SIEMPRE IGUALES DOS FUNCIONES DE UNA MISMA VARIABLE PARA VALORES CUALESQUIERA DE ÉSTA, **lo serán también las derivadas respectivas.**

Decimos, que si son Y, y dos funciones de la variable x, y se verifican para dos valores cualesquiera de las mismas

$$Y=y, \qquad Y_1=y_1;$$

deberá ser

$$\frac{dY}{dx}=\frac{dy}{dx}.$$

DEMOS.^{n} Sean

$$Y=F[x]+C, \qquad y=f[x]+c \qquad [m]$$

las formas de las funciones que, por un cambio de estado, se convierten en

$$Y_1 = F+F' \triangle x+F'' \triangle x^2 +C,$$

$$y_1 = f + f' \triangle x + f'' \triangle x^2 + c;$$

por lo cual

$$Y_1 - Y = F' \triangle x+F'' \triangle x^2 +C,$$

$$y_1 - y = f' \triangle x+f'' \triangle x^2 + c;$$

pero siendo por hipótesis,

$$Y_1 - Y = y_1 - y,$$

será también

$$F' \triangle x+F'' \triangle x^2 = f' \triangle x+f'' \triangle x^2 ;$$

y así, dividiendo por $\triangle x$ y tomando en seguida el límite, resulta, en fin,

$$F'(x)=f'(x), \qquad ó \qquad \frac{dY}{dx}=\frac{dy}{dx}.$$

L. Q. D. D.

Observación. La recíproca no es generalmente cierta; de manera que LAS FUNCIONES PRIMITIVAS, AUNQUE TENGAN IGUALES LAS DERIVADAS, PUEDEN DIFERIR EN UNA CANTIDAD CONSTANTE. Si se verifica, en efecto,

$$F'(x)=f'(x),$$

como por la diferenciación es cero la derivada de una cantidad constante [recíproco del teor. II]; resultará evidentemente,

$$F'(x)=F'(x)+0=F'(x)+\text{deriv. de const.},$$

$$f'(x)=f'(x)+0=f'(x)+\text{deriv. de const.},$$

formas que, en el caso más general, procederán de las funciones [m]; siendo pues,

$$F(x)=f(x);$$

y pudiendo ser

$$C \gtrless c,$$

resultará

$$Y-y=[F(x)+C]-[f(x)+c]=C-c=\text{cons.}$$

L. Q. D. D.

Se sigue de ésta,

$$Y=y+\text{const.}; \qquad \text{(n)}$$

de modo que, si se conoce la función primitiva y de que procede la derivada $f'(x)$, la ecuación *(n)* será la forma de todas las innumerables funciones que, no obstante el tener las mismas derivadas que

$$y=f(x),$$

pueden diferir todas entre sí.

IV

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ALGEBRICAS

22. TEOREMAS FUNDAMENTALES.—Ya sabemos [P. I, nº 25] que SON FUNCIONES ALGÉBRICAS LAS QUE FORMAN UNA ECUACIÓN ALGÉBRICA, es decir, que se relacionan en ellas las variables mediante las operaciones de adición, sustración, multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces con exponentes ó índices conocidos. Al presente nos proponemos encontrar los cocientes diferenciales de las funciones que afectan las indicadas formas, para lo cual sentamos los siguientes

Teoremas

I. EL COCIENTE DIFERENCIAL DE UNA SUMA ALGÉBRICA DE FUNCIONES DEPENDIENTES DE LA MISMA VARIABLE, **es igual á la suma algébrica de los cocientes diferenciales de las funciones.**

Decimos, que si es

$$y=t\pm v\pm u\pm\ldots\ldots\ldots \qquad (\tilde{n})$$

una expresión en la cual t, v, u, ... son funciones de x, de modo que se verifica

$$t=f(x),\ v=\phi(x),\ u=\psi(x),\ldots\ldots\ldots;$$

deberá ser

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\pm\frac{dv}{dx}\pm\frac{du}{dx}\pm\ldots\ldots\ldots$$

DEMOS.[n] Tendremos

$$y_1=y+\triangle y=(t+\triangle t)\pm(v+\triangle v)\pm(u+\triangle u)\pm\ldots.$$

$$=t_1\pm v_1\pm u_1\pm\ldots.$$

$$=[f+f'\triangle x+f''\triangle x]$$

$$\pm[\phi+\phi'\triangle x+\phi''\triangle x]$$

$$\pm[\psi+\psi'\triangle x+\psi''\triangle x]$$

$$\pm\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ó $$\triangle y=y_1-y=[t_1-t]\pm[v_1-v]\pm[u_1-u]\pm\ldots\ldots$$

$$=[f'+f''\triangle x]\triangle x\pm[\phi'+\phi''\triangle x]\triangle x\pm[\psi'+\psi''\triangle x]\triangle x\pm\ldots.$$

ó $$\frac{\triangle y}{\triangle x}=[f'+f''\triangle x]\pm[\phi'+\phi''\triangle x]\pm[\psi'+\psi''\triangle x]\pm\ldots\ldots$$

ó $$\frac{dy}{dx}=f'[x]\pm\phi'[x]\pm\psi'[x]\pm\ldots=\frac{dt}{dx}\pm\frac{dv}{dx}\pm\frac{du}{dx}\pm\ldots..(19)$$

L. Q. D. D.

Y, de conformidad con la notación establecida [ecua. (6)],

$$dy=\frac{dy}{dx}dx=\frac{dt}{dx}dx\pm\frac{dv}{dx}dx\pm\frac{du}{dx}dx\pm\ldots\ldots$$

$$=dt \pm dv \pm du \pm \ldots\ldots,$$

formas que son nuevas expresiones del teorema.

Corol. Si en la ecuación [ñ] fueran constantes algunas magnitudes, de modo que se tuviera

$$y = a \pm b \pm u \pm w \pm \ldots\ldots,$$

las derivadas de tales magnitudes serían cero [nº 22, teor. II]; y resultaría

$$dy = \frac{du}{dx}dx \pm \frac{dw}{dx}dx \pm \ldots\ldots$$

$$= du \pm dw \pm \ldots\ldots;$$

esto es: LA DERIVADA Ó DIFERENCIAL DE UNA SUMA ALGÉBRICA DE MAGNITUDES CONSTANTES Y VARIABLES, **es igual á la suma algébrica de las derivadas ó diferenciales de las magnitudes variables.**

II. EL COCIENTE DIFERENCIAL DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES DEPENDIENTES DE LA MISMA VARIABLE **es igual á la suma de los productos que resultan multiplicando el cociente diferencial de cada una de las funciones por el producto de las ótras.**

Decimos, que respecto de la expresión

$$y = tvuz \ldots\ldots,$$

en la cual t, u, v, z, ... son funciones de x, como se ha indicado en el teorema anterior; se verificará

$$\frac{dy}{dx} = vuz \ldots \frac{dt}{dx} + tuz \ldots \frac{dv}{dx} + tvz \ldots \frac{du}{dx} + \ldots\ldots$$

(Continuará)