TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS
EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

CALCULO DIFERENCIAL

LIBRO I

PRINCIPIOS GENERALES

DE

DIFERENCIACION

IV

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ALGEBRICAS

(Continuación de la página 278, Núms. 99, 100 y 101)

Demos.n Porque siendo, como se ha dicho,

$$t=f(x),\ v=\phi(x),\ u=\psi(x), \ldots\ldots\ldots\ldots$$

y considerando la forma completa del cambio de estado [ecua. (8)], tendremos:

Caso 1º: *con dos factores*, como *t*, *v*,

$$y_1 = (t+\triangle t)(v+\triangle v)=t_1\, v_1$$

$$=(f+f'\,\triangle x+f''\,\triangle x^2)(\phi+\phi'\,\triangle x+\phi''\,\triangle x^2)$$

$$=\phi\, f + \left.\begin{array}{l}\phi\, f' \\ +\phi'\, f\end{array}\right| \triangle x + \left.\begin{array}{l}\phi\, f'' \\ +\phi'\, f' \\ +\phi''\, f\end{array}\right| \triangle x^2 + \left.\begin{array}{l}\phi'\, f'' \\ +\phi''\, f'\end{array}\right| \triangle x^3 + \phi''\, f''\, \triangle x^4,$$

ó
$$\triangle y = y_1 - y = \left.\begin{array}{l}\phi\, f' \\ +\phi'\, f\end{array}\right| \triangle x + \left.\begin{array}{l}\phi\, f'' \\ +\phi'\, f' \\ +\phi''\, f\end{array}\right| \triangle x^2 + \ldots\ldots,$$

ó
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \phi\, f' + \phi'\, f + \left.\begin{array}{l}\phi\, f'' \\ +\phi'\, f' \\ +\phi''\, f\end{array}\right| \triangle x + \ldots\ldots;$$

y, como desaparecen en el límite todos los términos que tienen el factor $\triangle x$, resulta, en fin,

$$\frac{dy}{dx} = \phi\, f' + f\, \phi' = v\,\frac{dt}{dx} + t\,\frac{dv}{dx},$$

ó
$$dy = v\,\frac{dt}{dx}dx + t\,\frac{dv}{dx}\,dx = v\,dt + t\,dv.$$

Caso 2º: *con tres factores*, como *t*, *v*, *u*, haciendo $T=tv$,

$$y=tvu=Tu;$$

de donde, por la aplicación del *caso* 1º,

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dT}{dx}+T\frac{du}{dx}=u\left(v\frac{dt}{dx}+t\frac{dv}{dx}\right)+tv\frac{du}{dx}$$

$$=vu\frac{dt}{dx}+tu\frac{dv}{dx}+tv\frac{du}{dx},$$

ó $$dy=vu\frac{dt}{dx}dx+tu\frac{dv}{dx}dx+tv\frac{du}{dx}dx$$

$$=vu\,dt+tu\,dv+tv\,du.$$

Caso 3º: *con cuatro factores*, como t, u, v, z, haciendo

$$T=tvu,$$

$$y=tvuz=Tz;$$

de donde, por la aplicación del *caso anterior*,

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{dT}{dx}+T\frac{dz}{dx}=z\left(vu\frac{dt}{dx}+tu\frac{dv}{dx}+tv\frac{du}{dx}\right)+tvu\frac{dz}{dx}$$

$$=vuz\frac{dt}{dx}+tuz\frac{dv}{dx}+tvz\frac{du}{dx}+tvu\frac{dz}{dx},$$

ó $$dy=vuz\frac{dt}{dx}dx+tuz\frac{dv}{dx}dx+tvz\frac{du}{dx}dx+tvu\frac{dz}{dx}dx$$

$$=vuz\,dt+tuz\,dv+tvz\,du+tvu\,dz.$$

Y así, fundándose cada vez en el caso presedente, resultará para un número cualquiera de factores, como

$$y = tvuz\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dy}{dx} = vuz\ldots\frac{dt}{dx} + tuz\ldots\frac{dv}{dx} + tvz\ldots\frac{du}{dx} + \ldots \qquad [20]$$

L. Q. D. D.

Son también

$$dy = vuz\ldots\frac{dt}{dx}dx + tuz\ldots\frac{dv}{dx}dx + tvz\ldots\frac{du}{dx}dx + \ldots$$

$$= vuz\ldots dt + tuz\ldots dv + tvz\ldots du + tvu\ldots dz + \ldots \qquad [21]$$

otras expresiones del teorema.

Corolarios

1º Si la ecuación [21] se divide por el producto de todas las funciones tendremos

$$\frac{dy}{tvuz\ldots} \text{ ó } \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} + \frac{dv}{v} + \frac{du}{z} + \ldots\ldots\ldots,$$

que dice: EL COCIENTE QUE SE OBTIENE DIVIDIENDO LA DIFERENCIAL DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES POR EL MISMO PRODUCTO, es igual á la suma de los cocientes que resultan de dividir por cada función la diferencial respectiva: llámase esta forma la *diferencial logarítmica*. (1)

(1) Se le da este nombre por una cierta analogía que tiene con el logaritmo de un producto; y por lo que se verá después.

2º Si la expresión, supuesto del teorema, es

$$y=(vuz\ldots.)\, t=A\, F(x),$$

á saber: el producto de una constante por una función, el resultado será el primer término de la (20), por anularse los demás; esto es:

$$\frac{dy}{dx}=(vuz\ldots..)\,\frac{dt}{dx}=A\, F'(x),$$

ó sea EL PRODUCTO DE LA CONSTANTE POR EL COCIENTE DIFERENCIAL Ó DERIVADA DE LA FUNCIÓN, verdad ya conocida por el teor. III del nº 21; luego este teorema es un corolario del II actual.

Por tanto, si se tiene

$$y=A\, F(x)=A\, x,$$

resultará

$$\frac{dy}{dx}=A,$$

de conformidad con el corolario 1º del teor. I, nº 19; y así: LA DERIVADA DEL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA VARIABLE INDEPENDIENTE, es igual á la constante.

III. EL COCIENTE DIFERENCIAL DE UN QUEBRADO Ó COCIENTE DE FUNCIONES DEPENDIENTES DE LA MISMA VARIABLE, es igual al denominador multiplicado por el cociente diferencial del numerador, menos el numerador multiplicado por el cociente diferencial del denominador; dividida la diferencia por el cuadrado del denominador.

Esto es, para

$$y = \frac{t}{v} \qquad (m)$$

verificándose

$$t = f(x), \quad v = \phi(x),$$

debe ser

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{dt}{dx} - t\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

ó

$$dy = \frac{v\,dt - t\,dv}{v^2}.$$

Demos.ⁿ Se infiere de (m)

$$yv = t;$$

y, por el teorema anterior,

$$y\,dv + v\,dy = dt,$$

ó

$$v\,dy = dt - y\,dv = dt - \frac{t}{v}dv = \frac{v\,dt - t\,dv}{v},$$

ó

$$dy = \frac{v\,dt - t\,dv}{v^2},$$

una de las formas de teorema.

De otro modo: poniendo por *t* y *v* los valores respectivos, el nuevo estado de la función será

$$y_1 = \frac{f+f'\,\Delta x+f''\,\Delta x^2}{\phi+\phi'\,\Delta x+\phi''\,\Delta x^2},$$

ó
$$\Delta y = y_1 - y = \frac{f+f'\,\Delta x+f''\,\Delta x^2}{\phi+\phi'\,\Delta x+\phi''\,\Delta x^2} - \frac{f}{\phi}$$

$$= \frac{\phi\, f'\,\Delta x+\phi\, f''\,\Delta x^2 - f\,\phi'\,\Delta x - f\,\phi''\,\Delta x^2}{\phi^2+\phi\,\phi'\,\Delta x+\phi\,\phi''\,\Delta x^2}$$

ó
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\phi\, f' - f\phi' + \phi f''\,\Delta x - f\,\phi''\,\Delta x}{\phi^2+\phi\,\phi'\,\Delta x+\phi\,\phi''\,\Delta x^2};$$

y, por ser lím. $\Delta x = o$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\phi\, f' - f\,\phi'}{\phi^2} = \frac{v\,\frac{dt}{dx} - t\,\frac{dv}{dx}}{v^2}, \qquad (22)$$

L. Q. D. D.

Se deduce de ésta,

$$dy = \frac{v\,\frac{dt}{dx}\,dx - t\,\frac{dv}{dx}\,dx}{v^2} = \frac{v\,dt - t\,dv}{v^2},$$

como antes; y, como en el caso del corolario 1º del teorema precedente, resulta la *diferencial logarítmica* (1)

(1) Se le da este nombre por una cierta analogía que tiene con el logaritmo de un cociente.

$$\frac{dy}{y}=\frac{dt}{t}-\frac{dv}{v}.$$

Corolarios

1º Si es t=a cantidad constante en (m), desaparece en la (22) el primer término; y será

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a\frac{dv}{dx}}{v^2}, \qquad ó \qquad dy=-\frac{a\,dv}{v^2};$$

es decir: LA DIFERENCIAL DE UN COCIENTE, CUYO NUMERADOR ES CONSTANTE, es igual al cociente que resulta de dividir el producto del dividendo y la diferencial del divisor, por el cuadrado de éste, tomando el cociente con signo contrario.

Nota.—Este corolario es el teorema IV, nº 21, en otra forma; pues que

$$y=\frac{a}{v}$$

es una función decreciente; y así que la derivada ó diferencial tenga signo contrario.

2º Si en la misma expresió (m) es v=a (constante), desaparece en la (22) el segundo término; por lo que se reduce á

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\frac{dt}{dx}}{a^2}=\frac{1}{a}\,\frac{dt}{dx}, \qquad ó \qquad dy=\frac{1}{a}\,dt,$$

lo que es una consecuencia del teor. III nº 21; pues

$$y=\frac{t}{a}=\frac{1}{a}t,$$

es el producto de la constante $\frac{1}{a}$ por la variable ó función t.

IV. El cociente diferencial de una potencia de la variable, **es igual al exponente multiplicado por la potencia de la misma variable, cuyo exponente es de la unidad menor que aquél.**

Para

$$y=x^m,$$

debe ser

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}, \qquad \text{ó} \qquad dy=mx^{m-1}\,dx.$$

Demos.[n] Como el exponente m puede ser un número entero, quebrado ó negativo, se tiene:

1.er caso: si es m un número entero,

$$y=x^m=x\;x\;x\ldots\ldots m \text{ veces};$$

y por el teor. II, corol. 1º,

$$\frac{dy}{x^m}=\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\ldots\ldots m \text{ veces}=m\frac{dx}{x},$$

ó

$$dy=mx^{m-1}\,dx. \tag{23}$$

L. Q. D. D.

De ésta sale

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}, \tag{24}$$

la otra forma del teorema.

2.º CASO: si m es negativo, resulta

$$y=x^{-m}=\frac{1}{x^m};$$

y por el corolario 1.º precedente y el *caso* 1.º,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1\ \frac{d(x^m)}{dx}}{(x^m)^2}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-m\ x^{-m-1}=-m\ x^{-(m+1)}.$$

3.er CASO: si $m=\frac{r}{s}$ es número fraccionario, por lo cual $r<s$; y ambos, números enteros; tendremos

$$y=x^{\frac{r}{s}},\qquad ó\qquad y^s=x^r\ ;$$

y, por el caso 1.º,

$$sy^{s-1}\frac{dy}{dx}=rx^{r-1},$$

ó
$$\frac{dy}{dx}=\frac{r}{s}\ \frac{x^{r-1}}{y^{s-1}}=\frac{r}{s}\ \frac{x^{r-1}}{x^{\frac{r(s-1)}{s}}}=\frac{r}{s}\ x^{r-1-r+\frac{r}{s}}=\frac{r}{s}\ x^{\frac{r}{s}-1}.$$

Nota.—Se ve pues, que sea cual fuere el exponente, el resultado es la ecuación (23) ó (24), que nos proponíamos demostrar.

De otra manera: un nuevo estado de la función será

$$y_1 = y+\Delta y=(x+\Delta x)^m,$$

ó $$\Delta y=y_1 - y=(x+\Delta x)^m - x^m = x^m\left[\frac{(x+\Delta x)^m}{x^m} - 1\right]$$

$$=x^m\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1\right],$$

ó $$\frac{\Delta y}{\Delta x}= x^m\,\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\Delta x}=x^{m-1}\,\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\frac{\Delta x}{x}}, \qquad (n)$$

ó, tomando el límite,

$$\frac{dy}{dx}=x^{m-1}\ \text{lím.}\ \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\frac{\Delta x}{x}}=m\,x^{m-1},$$

como antes: el valor *m* se obtiene, ya porque escribiendo $\frac{\Delta x}{x}=\delta$, se sabe, por la P. I, nº 43, corol. 5º, que

$$\text{lím.}\ \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \text{lím.}\ \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta}=m;$$

ya porque, aplicando la fórmula binomial á [n], se obtiene directamente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{m-1}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^m-1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$=x^{m-1}\frac{1+m\left(\frac{\Delta x}{x}\right)+\frac{m(m-1)}{1\times 2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2+\ldots\ldots-1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$=mx^{m-1}\left[1+\frac{m-1}{1\times 2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)+\frac{(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2+\ldots\right],$$

ó por razón del límite, pues que desaparecen todos los términos que tiene el factor $\frac{\Delta x}{x}$,

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}.$$

Nota.—Esta demostración es general, por serlo el teorema de que se infiere el corolario citado, como se ha visto en el lugar aludido. Además, la fórmula del binomio es también general, por lo expuesto en la P. I, L. II, nº 120.

Consecuencias

1ª Si $m=\frac{1}{2}$, de

$$y=x^m=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$$

sale

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sqrt{x})}{dx}=\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{ó} \quad dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

2ª Si $m=-1$, de

$$y=x^{-1},$$

sale

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(x^{-1})}{dx}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}, \qquad \text{ó} \qquad dy=-\frac{dx}{x^2}.$$

23. **DERIVADA DE UNA RAIZ.**—La consecuencia 1ª es un caso particular de la forma muy más general

$$y=\sqrt[m]{x}; \qquad [\tilde{n}]$$

y respecto de ésta tenemos el siguiente

Teorema. EL COCIENTE DIFERENCIAL DE UNA RAÍZ DE LA VARIABLE, es igual á la misma raíz dividida por el producto del exponente radical y la cantidad subradical respectiva; ó es también igual á la unidad dividida por el producto del exponente radical y otra raíz del mismo índice, cuyo rubradical tiene por exponente el índice menos uno.

Así que, respecto de [ñ], debe ser

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt[m]{x}}{mx}=\frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}.$$

DEMOS. Por el teorema IV precedente resulta

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sqrt[m]{x})}{dx}=\frac{d(x^{\frac{1}{m}})}{dx}=\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}=\frac{1}{m}x^{-\frac{m-1}{m}}=\frac{1}{mx^{\frac{m-1}{m}}}$$

$$=\frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

L. Q. D. D.

ó

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}=\frac{x^{\frac{1}{m}}}{mx}=\frac{\sqrt[m]{x}}{mx}. \qquad [25]$$

L. Q. D. D.

24. **DERIVADA DE LAS FUNCIONES INVERSAS.**— Ya se sabe [P. I, nº 26], que una función *es* simétrica *entre dos ó más variables, cuando éstas pueden cambiarse entre sí de todas las maneras posibles, sin que se altere el valor de la función;* y *es* inversa *si resuelta con relación á cada una de ellas*, *adquiere la expresión valores diferentes.*

Si pues, considerando la forma

$$y=f(x), \qquad [o]$$

que corresponde á la expresión resuelta por razón á y, la

$$x=F(y) \qquad [p]$$

tiene valores diferentes de los de aquélla, será [p] una función inversa de [o]; y ésta, de [p]. Para funciones semejantes hay el siguiente

Toerema. Si dos variables determinan expresiones que constituyen funciones inversas, **la derivada con relación á la úna es el valor recíproco de la derivada con relación á la ótra.**

Para las expresiones [o] y [p] debe ser

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \text{ó} \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Demos. Los incrementos de las funciones puestas serán

$$\Delta y = f'\,\Delta x + f''\,\Delta x^2\,, \quad \Delta x = F'\,\Delta y + F''\,\Delta y^2\,;$$

y así

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{f'\,\Delta x+f''\,\Delta x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{f'+f''\,\Delta x}};$$

ó, en el límite,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{f'(x)}}=\frac{1}{\frac{1}{\frac{dy}{dx}}};$$

por lo que salen: de los dos primeros miembros,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}};$$

del segundo y cuarto,

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

[26]

L. Q. D. D.

Nota.—Esta última, considerando la [p], suministra

$$F'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'[F(y)]};$$

y la primera, considerando la (o),

$$f'(x)=\frac{1}{F'(y)}=\frac{1}{F'[f(x)]}.$$

25. **DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION.**—Sabemos por la P. I, nº 23, que FUNCIÓN DE FUNCIÓN *es la expresión sometida á operaciones que constituyen una nueva función; la que, por estar sujeta á otras operaciones, forma otra nueva función, &ª, &ª* De modo que, si por unas operaciones resulta

$$y=F(t);$$

por ótras,

$$t=f(u);$$

por otras nuevas,

$$u=\varphi(v);$$

y así en adelante, hasta tener por las últimas

$$z=\psi(x);$$

el conjunto de tales operaciones dan la *función de función*

(Continuará)