

LECCIONES

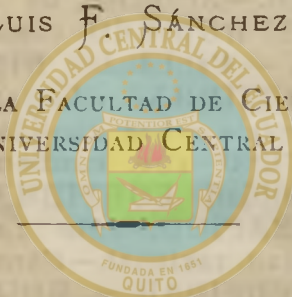
DE

Matemáticas puras y aplicadas

POR

LUIS F. SÁNCHEZ

PROFESOR EN LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA
UNIVERSIDAD CENTRAL



INTRODUCCION GENERAL (*)

Desarrollo matemático y definición de los elementos constitutivos de la CIENCIA O TEORIA DEL CUARTO y de sus LEYES.—De la RELACION DE IGUALDAD y de MAS Y MENOS.—Esta RELACION se combina con la de SEMEJANZA: es elemental é indefinible.—

[*] Damos principio á la publicación de esta obra por el TERCER CAPÍTULO, á causa de que para los dos primeros hemos encontrado algunos obstáculos, que no los exponemos por no ser del caso.

TANTO y CUANTO expresan una relación de igualdad.—La idea de MAGNITUD ó RELACION DE MAS Y MENOS, supone la de SEMEJANZA; dos clases ó categorías de MAGNITUDES.—Toda determinación CUANTITATIVA expresa una relación de igualdad.—Módulos: unidad FILOSOFICA y unidad MATEMATICA.—Verdadero concepto cuantitativo de la EXTENSION: sus FORMAS fundamentales y DIMENSIONES.—Representación de toda cantidad por medio de signos.—La denominación numérica es una IDEA-SIGNO.—Carácter elemental de la concepción numérica.—Medidas de la extensión: son relaciones numéricas y por consiguiente de IGUALDAD.—Acepción de la palabra MEDIDA.—El NÚMERO como agregación de individuos.—Cantidades DISCRETAS y cantidades CONTINUAS.—La cantidad de MATERIA es discreta.—Las cantidades de EXTENSION y PESO son continuas.—La medida de la cantidad CONTINUA no se adapta á la DURACION; sólo tiene por medida una cantidad racional.—Cantidad CONFUSA ó de INTENSIDAD y VIVEZA.—Grados de la cantidad INTENSIVA y medida de su incremento ó decremento.—Relaciones entre ESTA y las cantidades CONTINUA y DISCONTINUA.

III

25. Sabemos (Introd. Cap. I, núms. 2 y 5) que toda CIENCIA no es sino el *desenvolvimiento* de una IDEA PARTICULAR, y que para organizarse y constituirse SINTÉTICAMENTE, seguir todos sus pliegues, mirar en sus profundidades, apoderarse de todos sus lineamientos, *concretar* bien su MATERIA para penetrar en su INTERIOR CON-

TENIDO, necesita formular **leyes, funciones ideales** que, escapando á la delimitación ordinaria, y descartando en el sér cuyas manifestaciones nos rodean, los *caracteres ó rasgos* susceptibles de DEFINICIÓN, de medidas PRECISAS, fijen en símbolos, en caracteres *permanentes* los **elementos y señal** de sus INVESTIGACIONES; consistiendo su principal perfección en la **medida**, en las **determinaciones** de la CANTIDAD, la cual como categoría *fundamental* del entendimiento humano (que contempla las cosas como *únas, ó como muchas, ó como colección* de muchas unidades), y elemento *universal y necesario* de todas las IDEAS, es la más propia para ser objeto de una ciencia EXACTA, sin que ninguna de las que ostentan tan glorioso título y aspiran al dictado de tales pueda ser extraña á sus **combinaciones**.

26. Las CIENCIAS que en germen encierran tales DETERMINACIONES, y fijan de un modo preferente las LEYES ó FUNCIONES que unen á los diversos *elementos* del MUNDO FENOMENAL; que compara la ENTIDAD de las ideas de acuerdo con la NATURALEZA, y determina la FORMA en que más convenientemente han de ofrecerse para cumplir la vida del espíritu; que reconoce la CANTIDAD y la consigna por medio del *número*, aprecia y determina la FORMA con relación á la materia y al espacio que la circunscribe; que estima la ACCIÓN ó el MOVIMIENTO con relación al tiempo y al espacio, y dispone la FORMA de acuerdo con la acción que haya de ejercerse, poniendo en manos del hombre el dominio de la naturaleza, y perfeccionando á la vez las **artes ó aplicaciones**, regladas en cuanto á la *doctrina*, para satisfacer las necesidades de la vida material, son las **Ciencias Matemáticas** de que hemos hecho mención, y que constituyen el objeto preferente de este TRATADO.

27. Prescindiendo de dar una idea clara y cabal de ELLAS y de sus varias PARTES, lo cual tendrá lugar en el siguiente CAPÍTULO, nos dirigimos á hacer el desarrollo fundamental de los ELEMENTOS ó RELACIONES esenciales que forman la materia ó el principal contenido de sus DOCTRINAS y TEORÍAS, explanándolos y definiéndolos en conformidad al *objeto*, y añadiendo ciertas *aclaraciones* que sirviendo de complemento á todo cuanto llevamos dicho, formen el núcleo de las numerosas *cuestiones*, y de todo cuanto en las CIENCIAS DE LA CANTIDAD integran tan bello y complejo **mecanismo**.

28. La idea del NÚMERO, en general, se despierta en nosotros, por la contemplación de objetos *distintos y semejantes*. Mas estos objetos, entre otros varios modos, pueden determinarse, ya por su colocación *relativa*, ya teniendo en cuenta, además de su situación, ciertos caracteres *comunes* á todos ellos, en los cuales se funda exclusivamente su cualidad de HOMOGÉNEOS.

Esta cualidad nos permite considerar una *serie ó conjunto de cosas*, como resultado de la repetición en su posición de cualquiera de ellas, y aun concebir una sola cosa como *pro-*

ducto de la aglomeración sucesiva de otra de su misma especie, cuya repetición, hasta formar el total de la primera, determina la magnitud ó tamaño *relativo* de ambas.

Siempre que un conjunto de objetos, ó un objeto solo, puedan efectivamente mirarse como un TODO CONSTITUIDO por la repetición de algún otro objeto de su especie, tal conjunto ó tal *entidad* recibe el nombre de **cantidad**.

29. Para concretar su *naturaleza*, apreciarla en su *origen* y en sus varias *formas*, distinguiendo las RELACIONES con que se liga á ese otro elemento el **número**, la examinaremos en su propio FUNDAMENTO, en aquella relación ó *idea matriz*, que señalando los caracteres *comunes* de HOMOGENEIDAD en los cuales se funda, fija su esencia propia y determina su contenido.

30. Comparando CUALIDADES no sólo concebimos *semejanzas* entre ellas, sino *relaciones* de otra especie, en virtud de las cuales, aquel *grado de semejanza*, en el que, la blancura de la *nieve*, por ejemplo, nos parecería *superior* á la de la *leche*; un objeto una repetición *exacta* del otro; ó si se quiere, aquel grado en que se *asemejan* de representaciones mentales de un mismo objeto. Entre las relaciones ELEMENTALES no hay ningunas de mayor importancia. El entendimiento debe á ellas la coordinación, el inventario; por decirlo así, de todo lo que aprende y sabe. Las relaciones de SEMEJANZA y de MÁS Y MENOS sirven de guía al sabio para traducir la verdad aparente de los fenómenos con la *uniformidad real* que las leyes de la naturaleza formulan. Lo blanco y lo negro se asemejan en los colores; todas las substancias materiales en cuanto capaces de impresionar los órganos sensibles; todas las cosas que existen ó á que atribuimos una existencia ficticia, en esta misma razón de existir. La comparación de un objeto con otro nos da la percepción de la SEMEJANZA, y la comparación de estas semejanzas con aquéllas que suelen haber entre cualesquiera objetos de una colección, nos la hace concebir GRANDE Ó PEQUEÑA. Percibiendo en las cosas mayor ó menor semejanza, las vemos como acercarse ó alejarse entre sí. Entre el color de una *rosa* y el de la *nieve* hallamos, por decirlo así, mayor distancia que entre el color de la *nieve* y el de la *azucena*; la CERCANÍA y la DISTANCIA se presentan naturalmente al espíritu, como símbolos de la *mayor ó menor semejanza*, ó de lo que llamamos ordinariamente *semejanzas* ó *diferencias*. Comparando el *grado* de semejanza que *primariamente* percibimos entre sus FORMAS, con los *grados* de semejanza en que suelen presentárenos las formas de los objetos de la misma *clase*, y percibiendo que las últimas son ordinariamente más *altas*, es como llegamos de este modo á concebir la *semejanza* como una cualidad susceptible de GRADOS, desde aquél en que un objeto nos parece una repetición exacta del otro, hasta aquel en que la semejanza nos parece desvanecerse del todo: á los *grados más altos* de mayor semejanza damos el nombre de SEMEJANZAS, y á los *grados más bajos* el de DIFE-

RENCIAS. En este sentido las semejanzas y las diferencias no son más que grados diversos de la semejanza **primaria**, y por consiguiente RELACIONES DE RELACIONES, las cuales por ser *irresolubles* en *ótras*, son *elementales* y por consiguiente *indéfinitas*.

No es exacto que percibir la *semejanza* entre dos objetos es percibir lo que tienen de común entre sí. Pudiera creerse que si la *cualidad* ó *semejanza* *A*, por ejemplo, nos parece *mayor* que *B*, es porque vemos en *A* la cantidad *B* y otra más que llamaremos *C*; de lo que parece deducirse que la **relación de más y menos** es en todos casos **COMPLEJA**, siendo uno de sus elementos la **relación de igualdad**. Pero la resolución de la relación $A > B$ en $B + C > B$ no nos hace avanzar un paso, porque en esta segunda expresión subsiste sin descomposición alguna la relación expresada por el signo $>$. Hay muchas cosas en que la resolución de *A* en $B + C$ es *imposible* ó á lo menos *obscura*. Una longitud puede aparecer *mayor* que otra, aunque no percibamos la *igualdad* de la segunda con cierta parte *determinada* de la primera; y cuando juzgamos que un color es *más subido* que otro, es imposible la resolución del primero en *dos porciones*, una de las cuales *iguale* al segundo. Los que consideran los objetos semejantes como compuestos de dos porciones, una *común* á todos ellos, y otra *no*, es claro que no suponen en el universo más que semejanzas y diferencias **COMPLETAS**, desconociendo las *degradaciones sucesivas*, y las *medias tintas* de que es susceptible una cualidad *simple* sin dejar jamás de serlo, y por medio de las cuales va alejándose, por decirlo así, *progresivamente* de sí misma.

31. TANTO y CUANTO—del latín **tantus, quantus**—significan lo mismo que **igual**, y de **quanto** se derivó CUANTIDAD ó CANTIDAD que en su *origen* significó **igualdad**. El uso de las lenguas manifestando la verdadera *significación* de las palabras, nos lleva á veces al *origen* de las ideas.

Cuando haciendo diferentes alusiones á las personas ó á los objetos, etc., decimos: TIENE **tauta** HERMOSURA ó BELLEZA **cuanta** GRACIA—LA NATURALEZA Y EL FIRMAMENTO OSTENTAN SU MAGNIFICENCIA Y ALEJAN SUS LÍMITES **tanto** MÁS, **cuanto** SON MEJOR ESTUDIADOS Y EXPLORADOS POR EL ASTRÓNOMO—LA CIENCIA ESTARÁ **tanto** MÁN ADELANTADA, **cuanto** MEJOR CONOZCA LAS LEYES DE LOS FENÓMENOS Y MÁS PERFECTAMENTE LAS ESLABONE; el régimen sólo varía, en lo cual es á menudo caprichosa la lengua, y los sinónimos *tanto* y *cuanto* aplicados á los dos términos de la comparación expresan la IGUALDAD entre ellos.

32. Esto supuesto: ¿qué es señalar la *cantidad* de una cosa? Señalar su MEDIDA (el número), esto es, señalar otra cosa ó relación *conocida* á lo que la primera es IGUAL.—Cuando en efecto, se tienen muchas cosas *semejantes*, por ejemplo muchos árboles, sonidos ó grados de calor, y se desea reunirlos ó saber cuántos son, es necesario CONTARLOS ó COMPUTARLOS. Esto se

hace tomando primero uno, y después otro, y luego un tercero, y así sucesivamente. Después de haber tomado una de estas cosas, v. gr. un sonido—que por su *singularidad* constituye esencialmente el **uno** de la colección ó del grupo—al tomar otro formamos los que se llama dos, si á estas dos vibraciones ó sonidos añadimos otro, formamos lo que se llama tres, y así sucesivamente, añadiendo, en general, cada vez, una cosa á cada una de las que ya teníamos *formadas*, vamos obteniendo lo que se llama cuatro, cinco, &^a.

Luego: LA CANTIDAD ó el CUANTO, es el número que consideramos en las cosas SEMEJANTES bajo el punto de vista de su agregación. Aquello, pues, en que no hay agregación se llama **uno**.(*) Cuando hay un agregado ó conjunto, lo determinamos por las palabras dos, tres, &^a—Pero como el MÁS ó MENOS de una cualidad está en ella misma, antes de toda comparación ó medida, pues el FUNDAMENTO de las relaciones que percibimos en las cosas debe existir necesariamente en ellas, se deduce lógicamente que LA MAGNITUD CUANTITATIVA ó CUANTO propiamente dicho, no puede consistir sino en el más ó menos de las cualidades de los seres, en cuanto estén ó no sujetos á número, peso y medida.

33. Reflexionando sobre todo lo que hemos dicho en los números 28, 30, 31 y 32 observemos:

1.º LA RELACIÓN DE MÁS Y MENOS, esto es, la idea de **magnitud**, y por ende la de **cantidad** (magnitud determinable), y la de **número** supone la de **semejanza**; ó en otros términos, la relación de IGUALDAD ó DESIGUALDAD no puede concebirse sino comparando *cualidades de una misma especie*: la semejanza al contrario, existe en muchísimas cosas en que no podemos concebir el MÁS Y MENOS. Encontramos por ejemplo, multitud de grados en la blancura, en la fragancia, en las dimensiones de un cuerpo, en el movimiento, en la fuerza, en lo vivo de las ideas, en lo agudo de los dolores; pero no podemos percibir MÁS ó MENOS en lo recto, lo circular, lo triangular, lo prismático, lo cúbico; á lo menos tomando estas palabras en su significación matemática. En general no podemos percibir el más ó el menos en aquellas cualidades que se reducen á la mera existencia de ciertas condiciones *invariables* en los objetos COMPARADOS. Un objeto no es propiamente más *hombre*, ni más *árbol*, ni más *pedra* que otro. El ESPACIO no es más ó menos *extenso* que la MATERIA, porque en esta comparación prescindiríamos del desarrollo de la extensión, que es en lo que ella puede ser *mayor* ó *menor*.

En consecuencia, cuando sin contraernos expresamente á

[*] Todo hombre tiene exacta idea de la **unidad**, como elemento *constituyente y perceptible* de la **pluralidad**, que le da á conocer desde temprano la simple *intuición externa*. El que sabe que significan *muchos* ó *pocos*, concibe muy bien lo que es *uno*.

una cualidad *particular*, afirmamos que un cuerpo es mayor que otro, se entiende en *volumen* ó *tamaño*. Cuando hablamos de más ó menos hombres, árboles ó piedras, nos referimos al *número*. Cuando hablamos de un grande *hombre* ó de un gran *escritor*, la cualidad á que nos referimos es la fuerza *moral*, la *elocuencia*, el *ingenio*. La RELACION DE MÁS Y MENOS ó LA CANTIDAD en general, se refiere siempre á una *cualidad*, sea que la expresemos, ó que ya el uso de la lengua, ya las circunstancias en que se habla, lo sugiera al entendimiento, sin que sea menester expresarla.

2.º Que para poder APRECIAR la **relación de más y menos** en las cosas CUANTAS, y en consecuencia formarnos la idea exacta del NÚMERO, de la magnitud CUANTITATIVA DETERMINABLE ó COMPUTABLE, basta que entre ellas forme una **colección** ó una **pluralidad** de partes, es decir, un todo ORGÁNICO y ARMÓNICO, ya *natural* ó *real*, como: la *distancia* entre dos lugares, la *superficie* de una pizarra, la *mole* de una montaña, el *esfuerzo* de un resorte comprimido; ya *lógico* ó *concebido* por la inteligencia, como: un *puñado* de granos de maíz, el *número* de animales que hay en un corral, ó el *número* de panes que hay en un cesta. La razón es, porque los conceptos de UNIDAD, PLURALIDAD y TOTALIDAD que el entendimiento aplica para juzgar las cosas como CUANTAS, en tanto se adaptan á la graduación ó determinación *exacta* de las *variaciones* de MÁS Y MENOS, en cuanto todas están á *igual distancia* unas de otras, y representan exactamente el *grado* ó *porción* de cantidad expresada por el módulo *uno* del que emanan; ó lo que es lo mismo, en cuanto todas las *indagaciones* y *combinaciones* que se hagan con los diferentes adjetivos ó grados de cantidad, son necesaria y absolutamente verdaderos respecto de cualquier sér al que se aplique el adjetivo *uno*, pues estriban todos en sus RELACIONES con él y en las PROPORCIONES que tienen con su valor.

Como base y aplicación, en algún tanto, del razonamiento y principios sentados, teníamos en el ejemplo del N.º 32, varios *árboles*, *sonidos*, *grados de calor*, con la propiedad característica de ser cada uno tal *individualidad* y no *otra*, y por eso pudimos numerarlos ó computarlos *cuantitativamente*, esto es, enlazarlos, agregándolos unos á otros y formando un TODO LÓGICO de ORDEN SUPERIOR, compuesto de un número mayor ó menor de partes *individual* y *cuantitativamente* diferentes; debiendo observarse para el objeto, que no es necesario que se parezcan en todo, basta que se asemejen en algo; así si entre esas cosas ó cualidades semejantes que teníamos, no hubiésemos querido ó podido distinguir los *sonidos* de los *grados de calor*, los habíamos computado por la nota común de ser VIBRACIONES ó MOVIMIENTOS OSCILATORIOS RAPIDÍSIMOS.

3.º Que precisamente porque las partes *cuantitativas* las consideramos bajo una nota *común*, es que los unimos en una SOLA, en un todo **homólogo** y **definido**, consiendiendo cabal-

mente en esto el NUMERAR, COMPUTAR ó MEDIR.

4.º Que CADA ÚNA de estas cosas ó cualidades *computables*, por oposición al CONJUNTO, se llama **unidad**. Por tanto el TODO (*) es una **multitud de unidades** ó una **pluralidad**.

Sentados estos preliminares entremos en MATERIA.

34. Llámase MAGNITUD, en general, toda cualidad de un ser ú objeto, susceptible por su misma naturaleza de aumentar ó disminuir absolutamente; esto es, de cambiar de intensidad y de extensión, de ser grande ó pequeña, sin que deje de ser lo que es.

O en otros términos:

Aquella propiedad en virtud de la cual es susceptible una cosa de aumento ó disminución.

Tales son la atracción planetaria é intermolecular; el movimiento, extensión y masa de los cuerpos; la longitud del camino ó trayectoria de un móvil; el esfuerzo muscular de los seres vivos; el talento relativamente considerado; la moralidad de las acciones racionales, etc.: pues, todos y cada uno de estos elementos son ATRIBUTOS ó CUALIDADES de los seres, y se comprende que pueden ser *mayores* ó *menores*, es decir, que por su naturaleza son susceptibles de aumento ó disminución.

35. Todas las magnitudes pueden considerarse divididas en dos GRUPOS ó CATEGORÍAS:

Unas como la *pesantez*, la *vibración atómica* y la *masa* son comparables con las de su misma especie (n.º 33, Observación 2ª), y puede conocerse su EXPRESIÓN CUANTITATIVA; pues si quisiéramos formarnos una idea axacta del CUANTO de estas propiedades, v. g. del *peso* de una MOLE, tomaríamos otro peso más ó menos *familiar* que nos sirviera de término de comparación, por ejemplo el QUINTAL MÉTRICO, y podríamos ver las veces que era mayor ó menor que dicha *medida*, determinando así su magnitud *cuantitativamente*. Ya hemos visto como la MAGNITUD MODELO con que se *compara* y por la cual se *determina* el CUÁNTO de las cosas, se llama **unidad**.

Luego: UNIDAD, en general, es la magnitud ó cantidad ABSOLUTA que se toma arbitrariamente, ó que se elige para expresar en valores de ella (mediante el NÚMERO), las diferentes magnitudes de su NATURALEZA. (**)

[*] Con más precisión y generalidad, entiéndese por TODO, *aquello que siendo uno é indiviso, está formado de varias partes en las que puede resolverse*; y por PARTES cada una de estas cosas ó elementos que lo constituyen.

(**) Cuando se dice que el planeta *Júpiter* es *mil y doscientos veces mayor* que la *Tierra* que habitamos, la *Tierra* sirve de *unidad* para la comparación de las dos MAGNITUDES. Al expresar que hay en un bolsillo *setenta liras*, que una piedra pesa *veinte arrobas*, que son las *once* (horas) de la noche, la *unidad* ó el *módulo* es respectivamente la *lira*, la *arroba*, la *hora*.

36. Otras magnitudes, como el ingenio, la salud ó robustez corporal, las afecciones del ánimo, la fuerza ó energía considesada en sí, etc. no son susceptibles de comparación CUANTITATIVA, de graduarse con EXACTITUD. No se sabe ni puede saberse *cuantas veces* sería mayor ó menor el talento militar de ANÍBAL, ilustre general cartaginés, comparado con el de ALEJANDRO EL GRANDE; el brillo de las sublimes especulaciones y fecundas producciones, realizadas en las ciencias *trascendentales* y *positivas* por el genio universal de LEIBNITZ, relativamente á las de DESCARTES ó de NEWTON: es imposible MEDIR, hallar el VALOR CUANTITATIVO, el CUANTO de tal virtud comparada con otra. Nace esta imposibilidad de la misma naturaleza de estas magnitudes, en atención, á que no pueden descomponerse en PARTES que sirvan de término de comparación; y sin unidad, no hay COMPARACIÓN, no hay MEDIDA.

37. Hay, pues, RELACIONES DE MÁS Y MENOS, MAGNITUDES DETERMINABLES ó SUSCEPTIBLES DE APRECIACIÓN CUANTITATIVA, por entrañar su concepto distinción de partes que pueden servir de TÉRMINO DE COMPARACIÓN, las que en tal concepto se llaman CANTIDADES MATEMÁTICAS, ó simplemente CANTIDADES; de donde se sigue que:

CANTIDAD es toda magnitud, y en general todo aquello que, por constar de partes, es susceptible de apreciación cuantitativa, y puede recibir aumento ó disminución.

Otras por su naturaleza no admiten apreciación cuantitativa, es decir, no puede conocerse el CUANTO de su existencia.

38. Se sigue, por tanto, que toda cantidad es una magnitud, pero no toda magnitud es una cantidad; pues el concepto de magnitud sólo implica la cualidad de ser susceptible de aumento ó disminución, mientras que el concepto de cantidad entraña, además, la idea de posibilidad de apreciación cuantitativa, ó sea la idea de ser MENSURABLE.

39. En toda COMPUTACIÓN CUANTITATIVA ó MENSURA entran necesariamente tres cosas: *cantidad* que se mide, *unidad* que sirve de término de comparación, y *resultado* de comparación. Así, por ejemplo, si midiendo con el **decámetro**, las dimensiones de un jardín elíptico, se halla que su *diámetro mayor* tiene TRES DECÁMETROS de longitud, hay entonces tres términos distintos: la CANTIDAD que se va á comparar (dimensiones del jardín), la UNIDAD (que es el decámetro), y el RESULTADO de la comparación TRES, que se denomina NÚMERO.

Los tres términos que hemos CONCRETADO en el ejemplo anterior, son de necesidad ABSOLUTA: pues se requiere siempre para medir una *cantidad* (magnitud determinable), otra que sirva de *tipo* (unidad), lo que dará algún *resultado* (número).

40. NÚMERO, por tanto, es el resultado ó comparación de la *unidad* con la *cantidad*; y como el número determina la medida, el valor cuantitativo, el CUANTO de la cantidad, se define, tam-

bién, diciendo: *que es la expresión de la cantidad ya comparada.* (1)

41. La *unidad matemática* ó *módulo* para valuar la MAGNITUD, es en todos los casos una cantidad COMPUESTA; es decir divisible en partes más PEQUEÑAS, que á su vez pudieran tomarse como nuevas unidades, toda vez que, según la definición, la elección de ésta es arbitraria. Así en el ejemplo anterior, la unidad DECÁMETRO (entidad indivisa), podemos considerarla, como formada de diez partes iguales llamadas *metros*, ó de cien partes iguales, denominadas *decímetros*, ó de mil iguales, llamadas *centímetros*; si, pues, se toman por unidades independientes, *sucesivamente* el *metro*, ó *decímetro*, ó *centímetro*, entonces el valor cuantitativo de la dimensión aludida, será respectivamente *treinta metros*, ó *trescientos decímetros*, ó *tres mil centímetros*, en lugar de TRES DECÁMETROS.

Esta propiedad de la unidad matemática de ser *esencialmente divisible*, la distingue de la *unidad filosófica* que se considera *elemental*; es decir, *esencialmente indivisible*, y es como el límite, el elemento indescomponible de cada especie de cantidad.

42. Pero el espíritu humano no alcanza en sus investigaciones esa unidad filosófica, ese elemento para medir las cantidades de su especie, y no conoce por tanto el valor absoluto de las magnitudes.

Nadie conoce, en absoluto, el volumen, la distancia, la densidad ó cantidad material, la temperatura, el peso, etc., de los cuerpos; y sólo podemos apreciar el *cuanto* de estas propiedades, comparándolas con el volumen, la distancia, la densidad, la temperatura, el peso, etc., de otros cuerpos que tomamos respectivamente por unidades, considerándolas como si fuesen conocidas; pero que realmente desconocemos en su valor absoluto. (2) (3)

43. Entre las cualidades de los cuerpos determinables *cuantitativamente*, hay una importantísima, por considerarse en cierto modo, como esencial para su existencia. Si imaginamos un cuerpo, podemos prescindir, hacer abstracción de su pe-

(1) Expresión es un signo *manifestativo* de las IDEAS y *representativo* de las COSAS.—Un *monumento* ó *obra pública* que se levanta para memoria de alguna cosa; un *paisaje* ó *representación artística*, por medio de la PINTURA, de CIERTA EXTENSIÓN de un país; la *palabra* ó *sonido escrito*, son EXPRESIONES.

(2) Hablando en rigor la magnitud no puede valuarse sino por *comparación*: no hay cosa grande ni pequeña por sí misma ó de un modo absoluto en el mundo material sino con relación otra cosa.

[3] Tales son las razones expuestas por el Señor Rubio Díaz, eminente matemático español, á quien seguimos en muchos puntos; por las cuales, la *unidad* (elemento invariable), y el *valor absoluto de las magnitudes* las consideramos como absolutamente desconocidos; al contrario de la doctrina profesada por algunos autores, quienes confundiendo el conocimiento *meramente familiar* y *relativo* que tenemos de las magnitudes con el *real* y *absoluto* que deberíamos tener, enseñan que la *unidad* es siempre una cantidad *conocida*.

so, de su densidad, de su dureza, de su frangibilidad, del color; pero es de todo punto imposible concebirlo sin que ocupe un lugar en el ESPACIO, que es lo que constituye su **extensión**. (1)

La extensión tiene por cualidades esenciales la *forma* y la *posición*. En efecto, la extensión de un cuerpo (ó lugar determinable que ocupa en el espacio), supone la idea de la *limitación*; ésta afectará necesariamente alguna forma, cierto carácter ó aspecto particular debido á su estructura, y he aquí lo que se llama *figura*; además el cuerpo necesariamente ha de estar en alguna parte, y esta circunstancia, actitud ó estado, se designa con la palabra *posición*.

44. En las determinaciones del espacio absoluto, infinito é informe, que son los cuerpos, debemos considerar, además, sus constitutivos *elementales*, esto es, los diferentes aspectos, sentidos ó direcciones con relación á los cuales se circunscriben y limitan, aumentan ó disminuyen de volumen ó de tamaño, originando en la *mente* el variable concepto *cuantitativa* de la extensión.

Tales constitutivos (variables) reciben el nombre de *dimensiones*, y se considera ordinariamente **tres**: la *longitud*, la *latitud* y la *profundidad*.

Generalmente hablando, entendemos por **LONGITUD** la *dimensión que constituye lo largo de un cuerpo por la parte en que lo miramos*; por **LATITUD**, la que constituye lo ancho, y por **PROFUNDIDAD** ó **GRUESO** lo que forma su *altura ó espesor*. (2)

45. No puede existir cuerpo alguna que no tenga estas tres dimensiones juntas; pues por pequeño y tenue que sea un cuerpo, necesariamente existe en la naturaleza, extendiéndose en toda dirección y en cualquier sentido, esto es, teniendo algo de largo, de ancho y de profundidad ó grueso.

Sin embargo por la *abstracción* prescindimos de una ó más dimensiones; así cuando hablamos de la profundidad de un río, por ejemplo, no atendemos á lo que coge de largo ni de ancho.

46. Distinguiremos, pues, en relación al número de di-

[1] LA EXTENSIÓN, considerada abstractamente, ó de una manera general, es la *posición de partes fuera de partes*, ó sea todo lo que tiene dimensiones.—El ESPACIO es el lugar, extensión continuada, ámbito ó capacidad inmutable y sin límites, que resulta de todos los cuerpos del mundo coexistentes en una serie continua; es todo lo que rodea y abraza al universo material.—Filosóficamente considerado: es la continuidad de la multiplicidad coexistente; como el TIEMPO es la continuidad de la multiplicidad sucesiva. Experimentalmente espacio y tiempo son correlativos, y merced á esta correlación, conciertan la *movilidad*, el cambio de nuestros estados con la permanencia del sér que los sufre.

[2] Esta última dimensión se la suele nombrar *altura, profundidad ó grueso*, según sea el objeto á que se aplica; si éste fuese por ejemplo, un árbol, un edificio, un monte, etc., diríamos su *altura*; si un río, un estanque, un foso, etc., su *profundidad*; si un libro, madero, ladrillo, etc., su *grueso ó espesor*.

mensiones, tres especies de extensión: *la extensión en sola longitud ó en una dimensión* que se llama LÍNEA; *la extensión en longitud y latitud solamente*, que se llama SUPERFICIE; y *la extensión en longitud, latitud y profundidad*, que se llama CUERPO SÓLIDO ó VOLUMEN GEOMÉTRICO. La *primera*, objetivamente considerada, es el LÍMITE de la SEGUNDA; y ésta de la *extensión integral, completa é indivisa* que es el cuerpo geométrico, el cual se presenta en primer término á nuestros sentidos, no pudiendo los OTRAS DOS tener existencia *real y concreta* fuera de ÉI, pero si una existencia independiente y meramente racional en la mente que LAS concibe.

El PUNTO, considerado geoméricamente, es una cosa, un ente *ideal* que no tiene dimensión alguna, que representa el límite *elemental*, la *carencia* de extensión; tal es la *extremidad*, ó intersección común de dos líneas, la cual teniendo en concreto posición, pero no dimensión en longitud, latitud y profundidad, sirve para determinar el lugar.

47. Comparando un número con otro, percibimos que son iguales, ó que uno es mayor y otro menor. Esta cantidad de las agregaciones se distingue de todas las otras por un carácter peculiar: sus incrementos, ó aumentos infinitamente pequeños y sucesivos, son perfectamente distintos, y tan fáciles de discernir, como de representar en la memoria y en el lenguaje ó nomenclatura *matemática*.

48. Supuesto que DETERMINAR una cantidad es hallar ó designar otra cantidad de la misma especie, pero familiar ó conocida, á la que sea igual la primera, determinamos una cantidad *numérica ó discreta*, mediante la igualdad entre ella y otra cantidad numérica conocida. Esta segunda es la medida de la cantidad que se compara con ella y que ella representa y da á conocer (n.º 32).

49. Era indiferente (núms. 35 y 41) elegir para medida de las cantidades *numéricas* cualquier especie de *cantidad numérica*, con tal que nos fuese familiar, y pudiésemos hallar fácilmente la igualdad entre el más ó menos de la *cantidad mensurante*; y el más ó menos de los números que quisiésemos nos medir ó *representar* con ella. Un agregado cualquiera que se prestase indefinidamente á estas dos condiciones, podía servirnos de medida de las cantidades numéricas de los demás *agregados*.

50. La naturaleza nos dió en los dedos de las manos el *primer agregado* que nos sirvió de MEDIDA. Este agregado se presta fácilmente á la *computación, cuenta ó medición* de las cantidades numéricas, pues lo llevamos con nosotros mismos á todas partes; y como nos es tan familiar, sus *variedades de más y menos* representan al entendimiento con la mayor claridad las cantidades numéricas, ó adoptando el modo común ó abreviado de expresar esta idea, los números ó magnitudes discretas que medimos con ella.

51. Los signos numéricos de los ROMANOS son en gran

parte *geroglíficos mímicos*, esto es, símbolos ó expresiones figuradas, que representan directamente la *imagen*, así como las *variaciones de más y menos* de esta **cantidad mensurante**. Los signos I, II, III, IIII, pues en lo antiguo no se usó el signo IV, representan otros tantos dedos de la mano; el signo V representa los cinco dedos de la *mano extendida*; los signos VI, VII, VIII, VIII, (en lo antiguo no se usaba el signo IX) representan la una mano, y además, úno, dos, tres ó cuatro dedos de la ótra; y el signo X que se compone de dos VV unidos por los vértices, representan todos los dedos de ambas manos extendidas.

Pero este agregado *mensurante* no se prestaba con facilidad á los incrementos *ulteriores* de la cantidad numérica. Para extender su aplicación, se hizo necesario multiplicar las manos, representando sobre una superficie tantas manos ó dedos como se requería para la igualdad de medida. Como el signo simple de más valor era el número *diez*, procediendo de *diez* en *diez* nos familiarizamos con la progresión *décupla*, adoptada en la mayor parte de las lenguas para la indicación de las cantidades numéricas. Siguiendo este proceder que acabamos de indicar, se pudieron representar fácilmente aquellas cantidades numéricas que no exigían gran número de signos. Llegóse hasta XXXXVIII, geroglífico de nueve manos y cuatro dedos, ó *cuarenta y nueve unidades*.

52. El lenguaje nos presentó luego un instrumento más cómodo. Pusimos nombres á los números, y ligamos estos nombres únos con otros en la memoria, compusimos la serie 1, 2, 3, 4, 5, etc., susceptible de continuarse indefinidamente, hasta donde quisiésemos, añadiendo nuevos nombres simples y compuestos, paralelos á los signos de la numeración arábiga. Si se presenta, pues, un agregado de granos y quiero determinar su número, no hay más que aplicar la serie de nombres que llevo conmigo, á la serie de granos que tengo delante, pronunciando al ver el primero, *úno*, al tocar ó ver el segundo, *dos*, y así sucesivamente, hasta que no quede ninguno. Cada úno de estos nombres me indican el lugar que ocupa en la serie, y el nombre que corresponde al último grano me sugiere todos los pasos por los cuales he llegado ó puedo llegar hasta él, y me proporciona así el poder representarme con claridad á mí mismo y á otros el número total de granos.

53. El proceder artificial, con que formamos estos nombres, continuando la serie hasta donde queramos, nos suministra una serie infinita de medidas, que se prestan á todas las cosas imaginables, y que se puede llevar á todas las partes de la memoria, y que aplicándose con suma facilidad á los números de cuantos agregados percibimos ó se nos ofrece indicar á otros, tienen además la ventaja de expresarse con una claridad y precisión á que no alcanza el lenguaje en ninguna otra especie de relaciones.

54. A la verdad son pocos los *números* que permiten representarnos distintamente en el entendimiento. ¿En qué se distingue la representación mental de *veinte mil* de la representación mental de *ciento treinta mil*? Pero no es necesario ir tan lejos. ¿En qué se distingue la representación mental de *veinticinco* de la representación mental de *veintiseis*? Los nombres nos bosquejan imágenes confusas del procedimiento por el cual pudiéramos llegar hasta ellos, si lo intentásemos; imágenes en que sólo columbramos á bulto agregados más ó menos grandes, pero indeterminados, y tanto más indistintos y oscuros, cuanto más avanzamos en el procedimiento, y más rápidamente se forman. No nos queda, pues, por este medio en el entendimiento otra señal distintiva de un número particular algo elevado, que el nombre mismo con que lo pronunciamos y que tenemos la facultad de descomponer, aunque casi nunca apelamos á ello. Nos valemos en este caso, como en otros muchos, de *ideas-signos*, que hacen las veces de verdaderas ideas, y que sólo despiertan sombras y rasgos indefinibles, partos caprichosos de la imaginación. ¿En qué consiste, pues, la claridad y precisión de las determinaciones numéricas? Unicamente en la facultad de descomponerlas, empleando para ello *diferentes* *múltiplos* de la unidad principal. Concebimos fácilmente el *número nueve*, como compuesto de dos agregados *cuatro* y *cinco*, ó los agregados *dos* y *siete*. Concebimos fácilmente el *número diez*, que se llama *decena*, como compuesto por ejemplo de dos agregados *seis* y *cuatro*. Concebimos en seguida el *número ciento*, llamado *centena*, como compuesto de *diez decenas*; el agregado *mil*, llamado *millar*, como compuesto de *diez centenas*; el agregado 9625 como compuesto de *nueve millares*, *seis centenas*, *dos decenas* y *cinco unidades*, etc.

55. Bien es verdad que á los pocos pasos que diésemos en esta descomposición misma, no dejaría verdaderas ideas ó representaciones mentales, se haría potencial en vez de actual, pero siempre nos proporcionaría denominaciones precisas de la *diferencia*, y de cualesquiera otras *relaciones elementales*, entre dos números cualesquiera; y nos habilitaría para ejecutar sobre sus nombres, *ideas-signos* de los números, raciocinios prolongados y exactos; á que la escritura, es decir, la ARITMÉTICA, ha dado una suma facilidad y seguridad.

56. Hemos visto en el número 44, como la extensión, considerada sus *dinensiones*, es otra de las cualidades á que con frecuencia asociamos la idea de *cantidad*, que en este sentido particular, suele decirse más propiamente *grandor*, *magnitud* ó *tamaño*.

Determinamos la *cantidad de la extensión* de una cosa, ó para expresarnos con más brevedad, determinamos la *extensión* de una cosa, comparándola con otra extensión de la misma especie, que le sirva de medida. Prefiriéronse para medidas las extensiones más conocidas de todas y que pudiesen ha-

llarse á la mano, siempre que se trate de aplicarlas físicamente á las ótras. Tales fueron, por ejemplo, la longitud del *pie humano* para medidas de longitudes; la superficie del *pie cuadrado* para medidas de superficies, y el volumen del *pie cúbico* para medidas de volúmenes. Pero siendo extremadamente varia la longitud del pie del hombre adulto, se hizo necesaria fijarla, sustituyendo una *plancha de madera ó de metal* de longitud *determinada*, la cual ha conservado en muchos países el nombre de pie. Tenemos varias medidas de longitud, como pulgada, palmo, pie, vara, milla, legua, etc.; lo mismo se verifica en las otras especies de extensión. Pero aunque tuviéramos muchas más ¿cómo pudiéramos determinar por ellas mediante las relaciones de igualdad, modos tan diferentes é infinitamente varios, como los de la cantidad de extensión? El número suple esta falta. Una vez conocida, por ejemplo, la longitud del pie, podemos dar por conocida la longitud de tantos pies, cuantos fuesen necesarios para igualar colocados continua y sucesivamente la longitud de que se tratase. Adoptáronse al mismo tiempo otras medidas *mayores ó menores* que tenían determinadas relaciones con el pie, como la vara (tres pies), la pulgada (duodécima parte del pie). Diéronse así mismo nombres, para la comodidad del lenguaje y de la representación *cuantitativa* á los múltiplos de estas medidas, y en lugar de cierto número de centenares ó millares de pies, se dijo un *estadio*, una *milla*, una *legua*. Formando de la misma suerte agregados de *décimos*, *centésimos*, *milésimos* del pie, ó de cualquier longitud *familiar*, podemos ya medir y representar una cantidad de esta especie con cuanta precisión queramos.

57. La palabra *medida* significó dos cosas: la cantidad entera con la cual igualamos ótra, y en este sentido, que es en la que hemos usado hasta aquí, la medida de la longitud de esta mesa ú otro objeto cualquiera, es 7 pies, 8 pulgadas y 32 centésimos de pulgada, ó la *unidad de medida*, esto es, la cantidad que tomada cierto número de veces es igual á otra cantidad; y en este sentido la expresión anterior de la longitud de la mesa envuelve tres unidades diversas, el *pie*, la *pulgada* y el *centésimo* de pulgada. Para evitar dudas, diremos en el primer sentido **medida**, y en el segundo **unidad de medida**.

58. En el **número propiamente dicho**, que es la agregación de individuos semejantes, v. g., hombres, árboles, casas, hay una *unidad natural* que es el **individuo**: es á saber, el *hombre*, el *árbol*, la *casa*. *Individuo* es propiamente aquello que por su naturaleza no puede dividirse en otras cosas de su especie. Una mesa, por ejemplo, puede dividirse en mil pedazos, pero ninguno de éstos será ya una mesa. Por el contrario, en una porción de agua, no habiendo para nosotros individuos, tampoco hay *unidad natural*. Porque si tomamos esa porción y la dividimos en cualquiera núme-

ro de partes, y cada una de éstas en otras menores, hasta parar en las más mínimas partecillas perceptibles (molas), en cada subdivisión el agua permanecerá semejante á sí misma y siempre agua.

59. Vemos, pues, que la CANTIDAD, MAGNITUD CUANTITATIVA ó CUANTO en su plena determinación, por la cual se divide ó rompe, digámoslo así, en una multitud determinada de *cuantos* ó de *tamaños determinados*, entre sí diversos, puede resumirse ó sintetizarse en las dos siguientes **formas ó determinaciones principales**: *UNA, indirecta y mediatamente NUMERABLE, formando un todo completo, apreciable en partes, en unidades ó MEDIDAS CONVENCIONALES completamente arbitrarias que pueden variar el infinito, sin que su concepto envuelva necesariamente la idea de la pluralidad; y* *ÓTRA de propiedades contrapuestas, esto es, directa é inmediatamente numerable, compuesta y divisible en partes que tienen su individualidad propia, y que son realmente distintas, pues que el TODO DIVISIBLE lo formamos con un acto del entendimiento y partiendo de la semejanza que hay entre ellas.*

La primera constituye, como ya lo hemos visto, la CANTIDAD DISCRETA, NUMÉRICA ó DISCONTINUA; y la segunda la CANTIDAD MENSURABLE ó CONTINUA, conocida, generalmente, aunque con poca exactitud, con los nombres de EXTENSA ó GEOMÉTRICA.

60. Consideremos, en efecto, la longitud geométrica de un camino, ó la extensión superficial ó volumétrica de un espejo perfectamente pulimentado: no se observarán en dichas extensiones, partes distintas ó separadas de otras por *magnitud* ó *individualidad*, esto es, partes cuantitativas que se distingan unas de otras, formando individuos independientes y semejantes en NATURALEZA, sino que con anterioridad á toda operación intelectual constituyen por sí mismas un *todo*, en el que están íntimamente ligadas desde el principio hasta el fin, sin que las partes imaginables se distingan unas de otras, más que por el lugar del espacio que ocupan, más nunca por la sucesión ó límites tangibles que en ellas podemos distinguir. Esta CALIDAD de las cantidades geométricas de no tener partes cuantitativas naturalmente distintas, ó de sucederse las unas ó las otras sin interrupción ó límite fijo, constituye la **continuidad** de la extensión.

61. Al contrario si se observa las magnitudes numéricas múltiples, existentes en la NATURALEZA, como la reunión de libros que forman una biblioteca, ó de montañas encadenadas á larga distancia, formando una CORDILLERA; una constelación, un ejército, etc., vemos un todo, respectivamente formado por individualidades ó partes, que aunque semejantes, sin embargo no tiene enlace natural ó unión entre ellas, de modo que su separación ó individualidad externa y tangible se encuentra natural y completamente definida.

(Continuará)