TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

INTRODUCCION

AL ESTUDIO DE LAS MATEMATICAS SUPERIORES

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

IDEA DE LA ANALISIS ALGEBRICA

(Continuación de la página 164, número 109)

12. Significación.—La voz análisis–del griego *ἀνάλυσις*, derivado de *ἀναλύω*, *desatar*–significa distinción y separación de un todo para conocer sus principios ó elementos. Según la noción que hemos dado acerca de las Matemáticas sublimes (Introd. nº 4), se comprende que esto es lo que ellas se proponen hacer con la cantidad; por tanto, el primer paso que las ciencias matemáticas deben dar con el fin mencionado, si ha de tener algún nombre, ninguno es más propio que el de **Análisis**; y como tal estudio se verifica por medio de las reglas del álgebra, de aquí que la introducción de las *Matemáticas superiores*, ó sea *Teoría de las Funciones*, en el estudio de la cantidad, considerando los elementos, se haya llamado, con propiedad y rigorismo, **Análisis algébrica**, nombre que, por primera vez, fué usado por Cauchy.

En la acepción más general, la *análisis algébrica* considera y estudia las relaciones que existen entre las cantidades conocidas y las incógnitas, expresándolas por medio de ecuaciones; mas, si la parte de la *Teoría de las Funciones* de que ahora tratamos, hace lo mismo, no estudia ó investiga dichas relaciones de un modo cualquiera, sino que penetra en la íntima esencia de la cantidad, en los elementos que la constituyen; y prepara de este modo, el extenso camino que las Matemáticas superiores han de recorrer para llegar al término que se proponen.

La *Análisis algébrica* dispone, pues, el espíritu para el estudio de elevadas cuestiones analíticas, y añade nociones filosóficas, en mucho superiores á las especulaciones del álgebra elemental. Se infiere, por tanto, que esta ciencia es una verdadera parte ó rama de la *análisis general* ó *superior*, si los conocimientos científicos, para ser accesibles á la inteligencia humana, han de formarse de divisiones metódicas.

13. Definición de la Análisis Algébrica.—Todo lo dicho hasta aquí y lo expuesto en los n^{os}. 8 y 9, acerca de los valores constantes que reciben las funciones, facilitan la inteligencia de la definición que vamos á dar: examinar las propiedades de las funciones por los cambios que verifican en las cantidades los elementos que las componen, es el objeto de la *Análisis algébrica.* De esta manera afirmamos, que

La **Análisis Algébrica** *es la parte de la Teoría de las Funciones*, ó *Matemáticas sublimes*, *que se propone estudiar los cambios de las funciones originados por las va-*

riables, antes de que éstas y aquéllas adquieran valores determinados.

Observación.—Estudiar las funciones en los límites y descubrir las nuevas relaciones que se originan entonces, es el objeto de la otra parte de la *Teoría de las Funciones* llamada, en plural, *Cálculos Infinitesimales.*

La Análisis algébrica comprende, pues, el estudio de las cuestiones indicadas en los casos 1º y 2º del nº 9; y, por razón del método, dividimos el tratado en dos **Libros:** en el I se expondrá lo relativo al caso 1º, esto es, se tratará *del límite y propiedades de las funciones con relación á él;* en el II se investigará sobre *el desarrollo de las funciones*, que no es otra cosa que la *teoría de las series.*

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

I

PRELIMINARES

14. Expresión simbólica.—Ya sabemos que función es la forma ó expresión matemática que tiene dos ó más variables: la relación entre una función y su variable se representa simbólicamente por

$$f[x],\ \ F[x],\ \ \Phi[x],\ \ \varphi[x]\ \ \Psi[x], \ldots\ldots;$$

de modo que para $3x+2$, si llamamos y el valor que adquiere esta forma variando x, se tendrá

$$y=3x+2, \quad ó \quad y=f(x)=\varphi(x)=\ldots\ldots$$

15. Expresión de constantes.—El simbolismo de que hablamos señala sólo la dependencia de y respecto de x; mas, como al mayor ó menor valor de la función contribuyen también las cantidades constantes que entran en ella, algunas veces puede ser útil señalar tales constantes; así, la expresión

$$y=ax^3-x, \text{ puede representarse por } y=f(a.x).$$

16. Función con muchas variables. Cuando haya en una función muchas variables sólo una será la dependiente: las demás son variables independientes. En la expresión

$$3x^2-b.\log.\ y-z+k.v=0,$$

puede ser cualquiera de ellas la función ó variable dependiente; y como ésta depende de las otras, será, por ejemplo,

$$z=3x^2+kv-b.\log.\ y, \quad ó \quad z=f(x,\ y,\ v).$$

17. Ley de valores.—En una expresión matemática, como

$$y=1+2x;$$

por ser una ecuación indeterminada, vemos que x puede recibir valores diferentes; pero entonces y recibirá también valores diferentes; de modo que esta ley de valores ó cambios se dará por el siguiente cuadro

x=	0	1	2	3	4	5	..	..	..	...	...	∞
y=	1	3	5	7	9	11	..	..	..	...	...	∞

por tanto, si x pasa continua y sucesivamente de 0 á 1, y también pasará de la misma manera de 1 á 3: esto y no otra cosa señala la expresión puesta.

Si consideramos otra forma, como

$$y=3x^2+5x=x(3x+5),$$

resultará el cuadro

x=	0	1	2	3	4	..	..	..	..	...	...	∞
y=	0	8	22	42	68	..	..	..	...	...	...	∞

y en este caso, si bien por pasar x de 0 á 1 y pasa continuamente, y del mismo modo, de 0 á 8, sin embargo, el valor de la función crece más rápidamente que el de la variable.

18. Símbolo de cantidades.—A más del símbolo con que se representa la relación de dependencia entre una función y su variable, hay ótros para señalar estas mismas cantidades: generalmente las variables se designan por las letras últimas del alfabeto, ya sean funciones ó variables independientes, mientras que las cantidades constantes se representan por las primeras letras del mismo alfabeto.

19. Extensión de los símbolos.—Debe notarse también que el símbolo

$$y=f(x) \qquad (a)$$

expresa, no sólo una función determinada, como

$$y=ax^2+c-b;$$

sino ótras de cualquier forma, con las restricciones que á poco veremos; así la forma [a] puede igualmente representar las relaciones

$$y=b.\text{sen}\ x,\quad y=\text{sen}\ x+c.\log.\ x,\quad y=a^x,\ldots\ldots\quad (b)$$

Pero, si en el mismo cálculo se consideran diferentes depencias, entonces forzoso es emplear símbolos diferentes: si las expresiones [b], por ejemplo, resultan de una misma cuestión, se usarán para ellas los símbolos

$$y=f[x],\quad y=F[x],\quad y=\varphi[x]\ldots\ldots$$

Nota.—Se comprende, por la significación de estos simbolos, que

$$y=f(x),$$

por ejemplo, no dice *f multiplicada por x*, ó sea un signo de producto.

20. Relación de valores.—Se ha indicado [nº 17] que, si en dichas formas se dan á la variable diferentes valores, la función recibe valores correspondientes. Esta *correspondencia* no significa, empero, que los valores mencionados de la variable y función sean siempre *adecuados los únos á los ótros* ó sean de la *misma naturaleza;* lo que se quiere decir con esa palabra es, que un número indefinido de valores recibidos por la variable, produce en la función otro número indefinido de valores. Mas, si las funciones que se consideran son *continuas*, denominación que se explicará después, habrá perfecta correspondencia, como se verá al tratar de la *continuidad de las funciones.*

Sea ahora la ecuación

$$y=\sqrt{s^2-x^2};$$

en ésta, x puede tomar valores cualesquiera positivos, negativos, reales, imaginarios y complejos; pero no todos los de y tendrán el carácter de los de x: los valores reales de la variable se hallan entre $+\infty$ y $-\infty$; mas, si adquiere valores mayores que s, resulta

$$y=\sqrt{s^2-x^2} \quad =\sqrt{-(x^2-s^2)},$$

que, como sabemos, representa un número imaginario; y, por lo mismo, de una especie diferente de los de x:

$$\begin{array}{llll} & \text{para } x=0, & \text{es} & y=s, \\ \text{y} & \quad ,, \quad x=\pm s, & \quad ,, & y=0; \end{array}$$

luego, los valores reales de la función están entre los límites

$$x=0, \qquad x=\pm s:$$

para $x>\pm s$, y se hace imaginaria. La falta de *adecuación* entre los valores de la función y los de la variable, constituye la *discontinuidad de la función.*

21. Relación de variables.—Hemos visto que si una función depende de muchas variables, se la puede representar por

$$z=f(x, y, v, \ldots\ldots);$$

pero es necesario en muchas ocasiones indicar la relación con que se ligan las variables, si lo están de un modo fijo: si por adición, se escribirá

$$z=f(x+y), \text{ como en } z=a(x+y^2)+b(x+y);$$

si por multiplicación, tendremos

$$z=f(x.y), \text{ como } z=b.\text{sen } x.\log. y+x^n.y;$$

si por cociente, escribiremos

$$z=f[\frac{x}{y}], \text{ como en } z=\frac{ax}{y}.\log. b+c\frac{x}{y}.$$

&.ª, &.ª

22. Identidad.—El carácter distintivo de ésta entre dos funciones, es la igualdad de las cantidades ó valores constantes que las afectan ó modifican. De este modo

$$y=c[a-dx^2], \qquad z=c[a-dv^2],$$

son *funciones idénticas*, si x, v se consideran como variables.

23. Función de función.— Puede suceder que en un mismo asunto, una variable que determina una función, sea función de otra variable; ésta lo sea de ótra, y así sucesivamente: la expresión en que haya tales relaciones, se ha llamado *función de función.* Así

Función de función *es la expresión sometida á operaciones que constituyen una nueva función; la que, por estar sujeta á otras operaciones, forma otra nueva función; &.ª, &.ª* En otros términos: función de función *es la expresión que depende sucesivamente de diferentes variables, funciones las únas de las ótras.*

Si en la ecuación $y=f(z)$, z es una función de x, se verificará $z=\varphi(x)$; si x es una función de u, será $x=\Psi(u)$; y tendremos en el conjunto de operaciones una *función de función* que señalaremos con el símbolo

$$y=f\{\varphi[\Psi(u)]\},$$

que se lee: *y es la función de la función de la función de u.*

(Continuará)