II

CALCULO INFINITESIMAL

POR EL MISMO PROFESOR

I

CALCULO DIFERENCIAL

LIBRO I

PRINCIPIOS GENERALES DE DIFERENCIACION

V

DIFERENCIACION SUCESIVA Ó SUPERIOR

(Continuación, de la página 168, número 109)

Por lo que, siendo

$$\Delta x=(x+\Delta x)-x;$$

se sigue:

para la *derivada primera*, ccmo ya se sabe (números 8, 15, 18),

$$\Delta y = y_1 - y = \frac{y_1 - y}{\Delta x}\Delta x = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} . \Delta x, \qquad [e]$$

ó
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

ó, en el límite,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x); \qquad [f]$$

y por [e],

$$dy = \frac{dy}{dx} . dx = f'[x] . dx. \qquad [g]$$

Para la *derivada segunda*

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y = \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x = \frac{\Delta y_1 . \Delta x}{\Delta x} - \frac{\Delta y . \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x} \Delta x^2, \qquad [g']$$

ó
$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x};$$

ó, en el límite,

$$\text{lím.}\ \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \text{lím.}\ \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x};$$

esto es, según [f],

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \text{lím.}\ \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = f''[x]; \qquad [h]$$

y también, por [g′], [g],

$$d^2 y = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \,.\, dx^2 = \frac{d^2 y}{dx^2} \,.\, dx^2 = f''(x) \,.\, dx^2 \,. \qquad [i]$$

Para la *derivada tercera*

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y = \left(\frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right) \Delta x^2$$

$$= \left(\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}\right) \Delta x^2$$

$$= \frac{(\Delta y_2 - \Delta y_1)\Delta x^2}{\Delta x^2} - \frac{(\Delta y_1 - \Delta y)\Delta x^2}{\Delta x^2} \qquad [j]$$

$$= \frac{\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}}{\Delta x} \,.\, \Delta x^3 , \qquad [j']$$

ó

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{\frac{\Delta y_2}{\Delta x} - \frac{\Delta y_1}{\Delta x}}{\Delta x} - \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}}{\Delta x} \,;$$

ó, en el límite,

$$\text{lím.}\, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \text{lím.}\, \frac{\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}}{\Delta x}$$

$$= \text{lím.} \frac{\dfrac{\dfrac{\Delta y_2}{\Delta x} - \dfrac{\Delta y_1}{\Delta x}}{\Delta x} - \dfrac{\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x} - \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}}{\Delta x};$$

esto es, según [h],

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)}{dx} = f'''(x):$$

y también, por [j'], [i],

$$d^3 y = \frac{d\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d^3 y}{dx^3} \cdot dx^3;$$

y así para las derivadas de los demás órdenes.

30. Relaciones entre las derivadas.

Por lo visto en los núms. 8 y siguientes resulta que,

respecto de la derivada primera, es

dy infinitamente menor que y,

por ser dy una infinitésima del orden 1º, é y una cantidad ordinariamente finita.

Respecto de la derivada segunda: como disminuyendo más y más Δx, disminuye mucho más la expresión (g') de que procede la derivada, á saber,

$$\frac{\Delta y_1 \cdot \Delta x}{\Delta x} - \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x} = \Delta^2 y,$$

por ser la diferencia de dos productos, cada uno formado de dos factores que se acercan indefinidamente á cero, productos que son, por lo mismo, infinitésimas del segundo orden (P. I. nº 56); es manifiesto que en el límite, ó llegando á ser muy pequeños Δy_1, Δy, Δx, será $\Delta^2 y$ más pequeño todavía que éstos; y de aquí que *la diferencial segunda decrezca más rápidamente que la diferencial primera;* pues que se hace una infinitésima del 2º orden, como ya se insinuó en el nº 21, *Corol. del Teor. I.*

Respecto de la derivada tercera: asimismo, disminuyendo más y más Δx, disminuye más la expresión [j] de que procede la derivada, á saber,

$$\frac{(\Delta y_2 - \Delta y_1)\Delta x^2}{\Delta x^2} - \frac{(\Delta y_1 - \Delta y)\Delta x^2}{\Delta x^2} = \Delta^3 y,$$

por ser la diferencia de dos productos, cada uno formado de tres factores que se acercan indefinidamente á cero, productos que son, por lo mismo, infinitásimas del 3er orden (P. I, nº 56); es manifiesto que en el límite, ó llegando á ser muy pequeños

$$\Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \Delta y_1 - \Delta y, \quad \Delta x^2,$$

será $\Delta^3 y$ más pequeño todavía que éstos; y de aquí que *la diferencial tercera decrezca más rapidamente que la diferencial segunda;* pues que se hace una infinitésima del 3er orden.

Estas relaciones entre las derivadas ó diferenciales primera y segunda, segunda y tercera, valen para la tercera y la cuarta, la cuarta y la quinta; etc., etc.; de manera que, como ya se dijo al principio (nº3, *Método de Leibnitz)*, siendo la diferencial primera muy pequeña con relación á la ordenada ó cantidad finita: será la diferencial segunda muy pequeña respecto de la diferencial primera; la diferencial tercera muy pequeña relativamente *á la diferencial segunda;* y así entre las diferenciales de los demás órdenes. De lo que se sigue, que en una misma cuestión, resultando magnitudes de varios de éstos, se despreciarán las de órdenes superiores por razón á las de los inferiores.

Nota. Es manifiesto así, que la derivada segunda ó la diferencial del mismo orden de una función cualquiera, se obtendrá diferenciando dos veces la función propuesta; esto es: 1º, la función primitiva; y en seguida, la derivada ó la diferencial primera. Se obtendrá igualmente la derivada tercera ó diferencial del tercer orden de una función, diferenciándola tres veces; esto es: 1º, la función primitiva; 2º, la derivada primera; y 3º, la derivada segunda. Del mismo modo se procederá para encontrar la derivada ó diferencial de cualquier orden de una función: se diferenciarán la función propuesta y los resultados sucesivos tantas veces, como unidades tiene el grado de la derivada ó diferencial pedida. En cada nueva diferenciación, es ó debe considerarse dx como constante [nº 21, Teor. I, Corol.]

31. Diferenciaciones sucesivas notables.—Si se aplica lo dicho á algunas de las funciones hasta aquí estudiadas, que son las algébricas dependientes de una sola variable, se encuentran ciertos resultados dignos de notarse por la forma de los coeficientes que proceden del orden mismo de la diferenciación. Sean al efecto:

1º la forma ó función

$$y = t \pm u \pm v \pm \ldots\ldots,$$

donde t, u, v, ... dependen de una misma variable: considerando sólo las diferenciales de los términos, resultan

$$d y = d t \pm d u \pm d v \pm \ldots\ldots,$$

$$d^2 y = d^2 t \pm d^2 u \pm d^2 v \pm \ldots\ldots,$$

$$d^3 y = d^3 t \pm d^3 u \pm d^3 v \pm \ldots\ldots,$$

$$\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$d^n y = d^n t \pm d^n u \pm d^n v \pm \ldots\ldots;$$

y tienen los términos de todas estas ecuaciones, la unidad por coeficiente.

2º La forma ó función

$$y = t.u, \tag{k}$$

donde t, u dependen de una misma variable: considerando sólo las diferenciales de los términos, resultan

$$dy = t.du + u.dt. \tag{l}$$

$$\begin{aligned} d^2y &= t.d^2u + du.dt \\ &\qquad\qquad + du.dt + u.d^2t, \end{aligned}$$

ó

$$d^2y = t.d^2u + 2du.dt + u.d^2t. \tag{m}$$

$$\begin{aligned} d^3y &= t.d^3u + d^2u.dt \\ &\qquad + 2d^2u.dt + 2du.d^2t \\ &\qquad\qquad + du.d^2t + u.d^3t \end{aligned}$$

ó

$$d^3y = t.d^3u + 3d^2u.dt + 3du.d^2t + u.d^3t. \tag{n}$$

$$\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se ve pues, que los coeficientes de los términos de las diferenciales sucesivas resultan ser

los de la 1ª 1, 1,

,, ,, ,, 2ª 1, 2, 1,

,, ,, ,, 3ª 1, 3, 3, 1,

. . . . ,

. . . . ;

esto es: siguen la ley de los coeficientes binomiales, equiparándose los órdenes de las diferenciaciones á las potencias 1ª, 2ª, 3ª, ..., m^a del binomio. Lo mismo se observa respecto de los índices de las diferenciales *dt*, *du:* la suma de tales índices, en cada término, es constante é igual al orden de la diferencial de la función, disminuyendo los de *du* sucesivamente, desde dicho orden hasta cero; y aumentando los de *dt* de la misma manera, desde cero hasta el orden indicado; ó viceversa. Se comprende pues, que ha de verificarse en toda su extensión, para los coeficientes é índices, lo que, para los coeficientes y grados de los términos, en el desarrollo de

$$y^m = (t+u)^m.$$

De esta manera, la diferencial emésima de la expresión [k] será

$$d^m y = t.d^m u + md^{m-1}u.dt + \frac{m(m-1)}{1.2}d^{m-2}u.d^2t + \ldots\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots\ldots n}d^{m-n}u.d^n t + \ldots$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}d^2u.d^{m-2}t + mdu.d^{m-1}t + u.d^m t;$$

ó con más sencillez, recordando que los coeficientes binomiales del grado entero *m*, son las combinaciones de *m cosas* tomadas

una á una $= C_m^{[1]}$, dos á dos $= C_m^{[2]}$, tres á tres $= C_m^{[3]}$, ...

ene á ene $= C_m^{[n]}$, ...

hasta un cierto orden, reproduciéndose después tales valores, pero en un orden inverso:

$$d^m y = t.d^m u + \overset{1}{C_m}.d^{m-1}u.dt + \overset{(2)}{C_m}.d^{m-2}u.d^2 t + \ldots\ldots$$

$$+\overset{(n)}{C_m}\, d^{m-n}u.d^n t + \ldots . + \overset{1}{C_m} du.d^{m-1}t + u.d^m t, \quad [34]$$

fórmula que permite calcular inmediatamente la diferencial de cualquier orden de la expresión [k]; y es completamente *ajustada* ó *exacta:* ya porque se ha formado de la manera como proceden los coeficientes é índices en [l], [m], [n], ...; infiriéndose, por inducción, que los coeficientes é índices de la diferencial emésima, no pueden dejar de ser sino los en esa forma contenidos; ya también por el raciocinio siguiente: la expresión [34] contiene los coeficientes é índices de las diferenciales 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, ...; luego contendrá los de un cierto orden, como $m-1$.

(Continuará).