TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

(Continuación de la página 339, número 111)

24. Multiplicidad.—Con esta palabra designamos los diferentes valores que, para uno solo de la variable, reciben frecuentemente las funciones. Así, de

$$y^2 = 2x, \qquad y^n = bx^2 + a,$$

resultan

$$y = \pm\sqrt{2x} \qquad y = \sqrt[n]{bx^2 + a};$$

y de éstas, la primera tiene *dos* y la segunda *n valores* Semejantes expresiones se llaman también *multiformes*

II

CLASES DE FUNCIONES

25. Funciones algébricas y trascendentes.—Las funciones se dividen en *algébricas* y *trascendentes.*

Son algébricas *las que forman una ecuación algébrica; es decir, aquéllas en que las variables no están contenidas sino como base de una potencia.* Por esto, las operaciones que en tales funciones ligan á las variables, no son sino la *adición, sustracción, multiplicación, división, elevación á potencias* y *extracción de raíces con exponentes é índices conocidos.* Las funciones

$$y=3x^2+2x+c;\qquad y^4-3a^2x+x-y+b=0,$$

$$f(x)=x^m+bx=x^m\left(1+\frac{b}{x^{m-1}}\right)$$

son algébricas.

Son funciones trascendentes *las que no corresponden con lo expuesto, por contener otra clase de operaciones con las variables;* ó, mejor dicho, se llaman *trascendentes las funciones cuya relación con la variable ó variables, no está determinada por las operaciones ordinarias del álgebra.* A esta clase pertenecen las *funciones exponenciales*, las *logarítmicas* y las *circulares;* tales son

$$y=a^x,\quad f(x)=b+\log.\ x,\quad y=\frac{a.\operatorname{tg}x}{\cos x.\operatorname{sen}^2 x}=\frac{2a}{\operatorname{sen}\ 2x.\cos x}.$$

Por tanto las funciones

$$y=x.\log.\ b+z.\log.\ c,\qquad y=x.\operatorname{sen}.a+z.\operatorname{sen}.c$$

no son ni *logarítmicas* ni *trigonométricas;* pues, los logaritmos y las relaciones trigonométricas en ellas contenidos, versan sobre cantidades constantes.

Entre las varias ecuaciones trascendentes, son muy notables las

$$y = lx, \quad \rho = a.\cos\omega + a = a(1+\cos\omega) = 2a.\cos^2 \tfrac{1}{2}\omega:$$

la 1ª es la ecuación de la curva nombrada *logística* ó *curva de los logaritmos*, así llamada, porque, cuando se refiere á un sistema de ejes rectangulares, *la una de las coordenadas de un punto cualquiera de la curva es igual al logaritmo de la ótra;* la segunda de las ecuaciones puestas corresponde á la curva llamada *circloide.*

26. Clases de funciones algébricas. Las funciones algébricas pueden ser *explícitas* ó *implícitas*, *enteras* ó *fracciones*, *racionales* ó *irracionales*, *reales* ó *imaginarias*, *crecientes* ó *decrecientes*, *simétricas* ó *inversas.*

Son explícitas *las funciones en que una variable está expresada en términos de ótra y las constantes que en la función se consideran.* En semejantes funciones podemos distinguir y separar inmediatamente, ó por medio de simples transformaciones algébricas á lo más, la variable independiente de la dependiente. La forma general de las funciones algébricas es

$$y - f[x] = 0, \qquad ó \quad y = f[x],$$

como

$$y^2 - 2px = 0, \qquad ó \quad y^2 = 2px, \qquad ó \quad y = \pm\sqrt{2px}.$$

Son implícitas *las expresiones en que la función no está directamente dada en términos de la variable.* En estas funciones, por lo mismo, no se puede inmediatamente distinguir y separar la variable independiente de la dependiente; y, generalmente, no están bien definidas las operaciones que se deben ejecutar sobre las variables y constantes para obtener el valor de la función. Las funciones implícitas corresponden á la forma.

$$f(x, y)=0,$$

como

$$y^2+3xy+x+a^2=0.$$

Las *funciones son* **enteras** *si las variables sólo tienen exponentes positivos ó no están como denominador.* Así, *son funciones* **fraccionarias** *aquellas en que están las variables en el denominador, ó con exponente negativo en el numerador.* Las primeras son polinomios que corresponden á la forma.

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots+Nx^n; \qquad \text{(a)}$$

las segundas se forman por el cociente de dos polinomios, y tienen como expresión general

$$y=\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots+Nx^n}{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots+nx^n},$$

siendo en esta forma n un número posivo.

Son **racionales** *las funciones, si las variables tienen exponentes enteros, ó no están afectadas de radical alguno:* tal es la expresión (a) si n es un número entero; por tanto, las *funciones* **irracionales** *tienen propiedades opuestas, ó en ellas las variables están con exponentes fraccionarios:*

$$y=17x^{2/3}=17\sqrt[3]{x^2}$$

es una fracción irracional.

Las *funciones* **reales** *tienen valores correspondientes;* pero *si éstos son* **imaginarios**, las funciones se denominan *imaginarias.*

Las funciones son **crecientes** *si crece su valor creciendo la variable, ó tomando ésta incrementos positivos;* pero se llaman **decrecientes** *si, creciendo la variable, disminuye el valor de la función:*

$$y = ax + b, \qquad y^2 = a^2 + x^2,$$

son funciones crecientes; y decrecientes,

$$y^2 = R^2 - x^2, \qquad y = \frac{a+b}{x}.$$

Si se consideran las funciones

$$y = x^m, \qquad y = a^x, \qquad y = \text{sen } x;$$

las

$$x = \sqrt[m]{y}, \qquad x = \log.\ y, \qquad x = \text{arc. sen. } y$$

son inversas; por tanto, si una función de dos ó más variables se considera resuelta con relación á una de ellas, será **inversa** *cuando, resuelta con relación á la ótra, no quedan los mismos los valores de la función;* en otras palabras: *una función es inversa cuando, cambiándose las variables, resultan para éstas valores diferentes;* en caso contrario la función se llama **simétrica**: así, una función de dos ó más variables se dice **simétrica** ó **invariable**, *cuando las cantidades variables pueden cambiarse entre sí, de todas las maneras posibles, sin que por esto se altere el valor de la función:* las expresiones

$$R^2 = x^2 + y^2, \qquad a^2 = b^2 + x^2 + 3xy + y^2 + c$$

son simétricas; pues, cambiándose x en y y, viceversa, no por esto se cambia el valor de las expresiones indicadas.

27. Otras denominaciones.—Hay, además, las siguientes:

Función simple, *si una sola de las operaciones algébricas la liga á la variable; ó es aquélla en que las variables* *se ligan por relaciones ú operaciones no susceptibles de descomposición*, como

$$y = x^m, \qquad y = \text{sen } x, \qquad y = a^x.$$

Es **Función compuesta** *la que consta de algunas simples*, como

$$y = p.\text{sen } x - a^x + mx^3:$$

se infiere, que la *función compuesta* no es una *función de función* [nº 23].

Función regular ó periódica *es la que tiene después de ciertos valores de la variable, ó intervalos regulares, los mismos valores:* tales intervalos se denominan *períodos*. La función

$$y = \text{sen}.\alpha = \text{sen}.(\pm\pi - \alpha) = \text{sen}.(\pm 2\pi + \alpha) = \text{sen}.(\pm 3\pi - \alpha)$$
$$= \text{sen}(\pm 4\pi + \alpha) = \ldots\ldots;$$

ó, en general, $y = \text{sen}.\alpha = \text{sen}.[\tfrac{1}{2}\pi \mp (\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) \pm 2k\pi]$

es *periódica;* pues, para los intervalos

$$\alpha, \quad \pm\pi - \alpha, \quad \pm 2\pi + \alpha, \quad \pm 3\pi - \alpha, \quad \pm 4\pi + \alpha, \ldots\ldots$$

ó, en general, $\alpha, \quad \tfrac{1}{2}\pi \mp (\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) \pm 2k\pi$

del arco ó la variable, la función adquiere valores iguales.

Dimensión de una función *es la suma de los exponentes que se encuentran en un producto de factores variables.* Así

ax^3	es de la dimensión	3ª,
ax^2yz^3	" " " "	6ª,
$\sqrt{axy}$	" " " "	1ª,
$\frac{3}{4}a\frac{x^2}{y^{3/2}}$	" " " "	½, &ª, &ª

Por esto, **función homogénea** *es aquélla cuyos términos son de la misma dimensión*, como

$$x^2 + axy - \frac{x^{3/2} . z}{u^{1/2}} = 0,$$

cuyos términos todos tienen la misma dimensión 2ª, que lo es de la función; en caso opuesto, es decir, cuando los términos contienen diferentes dimensiones, la función se llama heterogénea: una función semejante puede considerarse como el agregado de tantas funciones homogéneas, como grupos de términos de diferentes dimensiones se pueden señalar en ella; y en lo antiguo se denominaban *bífidas*, si los grupos eran dos; *trífidas*, si eran tres; &ª; y, en general, *multífidas*, si eran muchos.

III

SIGNIFICACION GEOMETRICA

28. En qué consiste.—Esta significación *se expresa por el punto, línea ó superficie que representa la función cuando gráficamente se manifiesta la ley con que está ligada á la variable ó variables.*

29. Clases de líneas.—Como las ecuaciones, las líneas, que son la significación geométrica de las funciones, y en especial *las curvas*, se dividen en *algébricas* y *trascendentes*, según representen una ecuación algébrica ó trascendente.

Mas, no toda curva expresa una relación conocida ó que pueda conocerse; y como una curva no es otra cosa que *el lugar geométrico de las posiciones sucesivas ocupadas por un punto móvil, cuyo movimiento varía continuamente de dirección*, puede suceder que un punto al moverse, lo haga arbitrariamente sin sujetarse á ley alguna determinada, ó que esta ley no pueda definirse geométrica ni analíticamente: en este caso la línea engendrada por el móvil se llama *curva gráfica;* ó que el punto móvil, al variar de posición, lo verifique con arreglo á una ley fija de antemano, ó susceptible de definición geométrica ó analítica, de modo que se pueda por ella conocer, con toda exactitud, las posiciones sucesivas del punto: en este caso la línea engendrada recibe el nombre de *curva geométrica.*

Se comprende así que sólo las curvas de la segunda clase pueden ser objeto del estudio matemático: la otra clase de curvas no tiene importancia científica; y sólo se consideran tales curvas en la *ornaméntica.*

30. Geometría analítica y análisis algébrica.—En la sección que estudiamos, la Análisis algébrica viene como á identificarse con la Geometría analítica; pero, en verdad, hay entre la úna y la ótra la siguiente diferencia: *ésta se propone determinar algébricamente las relaciones entre las coordenadas de un punto cualquiera de una curva dada,* determinación que constituye lo que se llama la **ecuación de la curva**; mas aquélla, *estudiando el concepto general de las funciones, exige siempre, como dato, el conocimiento de las ecuaciones:* en la *Análisis algébrica,* la expresión

$$y=f(x)$$

es siempre lo que se conoce.

(Continuará).