TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

(Continuación de la página 440, número 112)

31. Modo de representación geométrica.—Suponiendo que en la expresión

$$y = f(x),$$

el movimiento se ha dé verificar en un solo plano, los diversos pares de valores reales que satisfagan esta ecuación serán las coordenadas de los diferentes puntos de la línea por ella definida. Por tanto, para el nacimiento de una curva por una función se ha de suponer que la ordenada se mueve desde un punto, creciendo ó decreciendo, según el valor que resulte de la expresión ó función dada: la línea continua que pase por los extremos de la ordenada en sus varias posiciones será una *línea recta* ó *poligonal*, que tendrá tanto mayor número de lados, cuanto mayor sea el número de los valores obtenidos para y por los dados á x; y cada uno de esos lados será tanto menor, cuanto menor sea la diferencia que hay entre un valor cualquiera de la ordenada y el siguiente: cuando los lados sean muy pequeños, la línea poligonal será sensiblemente *curva*. En consecuencia la *línea recta* ó *curva* hallada con el procedimiento expuesto, será el *lugar geométrico* de la expresión dada, ó *la representación geométrica de la función.*

32. Ejemplos.—La manera de ejecutar lo indicado se manifiesta en lo que sigue:

1º *Representación de una ecuación entre dos variables.* Sea la expresión de primer grado

$$y=2x+3.$$

Para los valores

$$x=\left\{\begin{array}{l} 0, \\ 1, \\ 2, \\ 3, \\ \vdots \end{array}\right. \quad \text{será} \quad y=\left\{\begin{array}{l} 3, \\ 5, \\ 7, \\ 9, \\ \vdots \end{array}\right.$$

por tanto, si en un sistema rectangular, para $x=0$ tomamos sobre el eje oy (fig. 1), la cantidad $oE=3$; después, para $x=1=01$, se levanta en el punto 1 la perpendicular $1E'=5$; y si, de igual modo, para $x=2, 3, \ldots\ldots$, en los puntos 2, 3,.....se construyen las perpendiculares $2E''=7$, $3E'''=9, \ldots\ldots$, se obtendrán los puntos E, E', E'', E''',.....: la línea EE'E''E'''..... que los una, será la representación geométrica de la función propuesta.

Se ve que tal línea debe ser una recta, ya porque la ecuación á que corresponde es de primer grado, según lo que se demuestra en la geometría analítica, ya porque de la relación de los valores correspondientes á x, y, sale

$$E'5 : E''7 : E'''9 : \ldots\ldots = E5 : E7 : E9 : \ldots\ldots$$

ó

$$1:2:3:\ldots\ldots=2:4:6:\ldots\ldots;$$

por tanto, si las líneas son proporcionales, las figuras que ellas respectivamente forman con EE', EE'E'', EE'E''E''',...... son triángulos semejantes, los cuales tienen común el vértice E y el lado Ey; luego el ángulo formado en E, entre este lado y las partes lineales antes indicadas, debe ser igual en todos los triángulos, lo que exige que los segmentos E'E'', E''E''',......sean prolongación de la recta EE'. Luego E, E', E'', E''', están en línea recta; y así, el lugar geométrico de la expresión dada es una línea recta.

Funciones como la (a) ó, más generalmente, las funciones de la forma

$$y=ax+b,$$

que originan ó corresponden á líneas rectas, se llaman *funciones lineales:* toda otra función produce, de ordinario, líneas curvas.

2º Sea la expresión

$$x^2+y^2=R^2:$$

se sabe que esta ecuación representa un círculo cuyo radio es R.

3º Sea la *logística ó ecuación de los logaritmos* de que hemos hablado (nº 25), á saber,

$$y = l.x$$

que corresponde á un sistema de base dada; por esto, si *a* es la base, ó si el sistema de logaritmos tiene por base el número *a*, la ecuación precedente se transforma en

$$x = a^y.$$

Ahora bien, para

$$y = \left\{\begin{array}{l} 0, \\ \tfrac{1}{2}, \\ \tfrac{3}{2}, \\ \tfrac{1}{4}, \\ \vdots \end{array}\right. \quad \text{es} \quad x = \left\{\begin{array}{l} 1, \\ \sqrt{a}, \\ a\sqrt{a}, \\ \sqrt[4]{a}, \\ \vdots \end{array}\right.$$

a) Como el valor $x=1$, es independiente de la base del sistema logarítmico que se considere; se sigue, que *la logística corta al eje de los números, ó de las abscisas, á una distancia igual á la unidad desde el origen.*

b) Si la base del sistema de logaritmos es mayor que 1 ($a>1$), los logaritmos de todos los números menores que la unidad serán negativos; por tanto, *los valores de* y *entre $x=0$, $x=0E=1$ (fig. 2) son negativos;* ó, lo que es lo mismo, para $x=0$, $x=1$ la curva sólo existe en la región de las ordenadas negativas.

c) Cuando $y=-\infty$, es $x=0$: luego *la curva corta ó se acerca indefinidamente al eje de ordenadas, en la región de las ordenadas negativas.*

d) Si $y = \infty$, es $x = \infty$; luego *la curva crece indefinidamente en la región de las ordenadas positivas.*

e) Para a positiva no hay ningún valor de y que haga á x negativa; luego *no hay parte alguna de la curva en la región de las abscisas negativas.*

Considerando pues, lo dicho en [a], [b], [c], [d], [e] resulta, como representación geométrica de

$$y = 1.\,x,$$

la fig. 2

4º Sea la expresión

$$y = \text{sen.}\ x,$$

Fórmese una circunferencia con $r = 1$ [fig. 3, 1ª], divídase la semicircunferencia en un número par de partes iguales, catorce, por ejemplo; y bájense de los puntos de división a, a_1, a_2, a_3, ... las líneas senos, $a_1\,1$, $a_2\,2$ $a_3\,3$, ...

Ahora bien, para

$$x = \left\{\begin{array}{l} 0, \\ \vdots \\ +\dfrac{\pi}{2}, \\ \vdots \\ +\pi, \\ \vdots \\ +{}^3/_2\pi, \\ \vdots \\ +2\pi, \end{array}\right. \quad \text{resulta} \quad y = \left\{\begin{array}{l} 0, \\ \vdots \\ +1, \\ \vdots \\ +0, \\ \vdots \\ -1, \\ \vdots \\ 0; \end{array}\right.$$

siendo

$$y = \cos.\ x,$$

para

$$x=\begin{cases} 0, \\ \vdots \\ +\dfrac{\pi}{2}, \\ \vdots \\ +\pi, \\ \vdots \\ +{}^3/_2\pi, \\ \vdots \\ 2\pi, \end{cases} \quad \text{resulta} \quad y=\begin{cases} 1, \\ \vdots \\ 0, \\ \vdots \\ -1, \\ \vdots \\ 0, \\ \vdots \\ +1. \end{cases}$$

Además, para los valores aa_1, aa_2, aa_3,...... del arco a, los de la línea seno estarán representados por a_1 1, a_2 2, a_3 3......; y los del coseno, para los mismos arcos, por o1, o2, o3......: si se ponen las magnitudes de los arcos indicados por abscisas y los valores de los senos y cosenos por ordenadas, los extremos de éstas darán, para el seno, la curva de la fig. 2ª; y para el coseno, la de la fig. 3ª Para x=o, es y=o; luego la curva respecto del seno, pasa por el origen del sistema de coordenadas; al contrario, respecto del coseno es y=1 para x=o; luego la curva corta al eje de ordenadas, desde el origen, á una distancia, oa=r=1. Para $x=\frac{\pi}{2}=90°$ la línea de los senos pasa por el punto más alto; la de los cosenos corta al eje de abscisas [v. el cuadro de valores, que precede]. Para $x=\pi=180°$, la de los senos corta al eje de abscisas, y la de cosenos pasa por el punto más bajo negativo. Para $x={}^3/_2\pi$, la primera curva pasa por el punto más bajo negativo; y la segunda, corta al eje de abscisas. Finalmente, para $x=2\pi=360°$, la de senos corta este eje; y la de cosenos pasa por el punto más alto positivo: se ve que las dos curvas son iguales, con sólo valores y representación inversos.

En la figura 3, las partes 2ª y 3ª se llaman las *curvas de los senos* y *cosenos*, respectivamente.

5º En la misma suposición de $r=1$, y mediante una construcción igual á la hecha para la curva de los senos, vemos que en la expresión

$$y=\sec. x,$$

para los valores, en un mismo sentido, de

$$x=0, \qquad +\frac{\pi}{2},$$

es, respectivamente,

$$y=+1, \quad +\infty;$$

por tanto, si desde el punto o° [fig. 4, 1ª], se toman los arcos en el sentido positivo; para las abscisas

$$x=o^\circ a,\ o^\circ a_1,\ o^\circ a_2 \ldots\ldots,\ o^\circ a_7=+\tfrac{1}{2}\pi$$

las ordenadas serán las respectivas líneas secantes, oo°, ot, ot', ot''......, que darán los puntos [o_1 para $x=0$, cuya ordenada del origen es igual á $r=1=oo_1$ (fig. 4, 2ª)], a_1, a'_1, a''_2 ...... Se ve pues, que entre los límites

$$x=0, \qquad +\frac{\pi}{2}$$

resulta la rama $o_1 L$ de una curva continua, en la región de las ordenadas positivas; pero llegando á ser $+\frac{\pi}{2}$ la abscisa, la ordenada crece indefinidamente en el sentido positivo; esto es: *se hace infinita la función*

$$y=\sec. x.$$

Y como, en verdad,

$$\text{para } x=+\frac{\pi}{2}, \qquad \text{es} \qquad y=\pm\infty;$$

se comprende, que con un mismo valor de la variable, ó alcanzando ésta por su magnitud á un cierto pnnto, pasa *bruscamente* la función, de $+\infty$ á $-\infty$; es decir, que á un mismo tiempo se obtienen puntos de la curva á una distancia infinita en *la región de las ordeuadas positivas y negativas.* De aquí, que para los valores de la variable

$$x=+\frac{\pi}{2},\ +\pi,\ +\frac{3}{2}\pi,$$

siendo el primero uno de los anteriores, sean los de la función, respectivamente,

$$y=-\infty,\ -1,\ -\infty;$$

los que originan la rama $L_1 o'_1 L'_1$, doble de la anterior, ó formada de dos partes congruentes, cada una, con ésta; pero en la región de las ordenadas negativas.

Como es asimismo,

$$\text{para } x=+\frac{3}{2}\pi, \qquad y=\mp\infty;$$

los valores de

$$x=+\frac{3}{2}\pi,\ +2\pi,$$

que completan la circunferencia, dan, respectivamente,

$$y=+\infty,\ +1,$$

valores á que corresponde la media rama $L_2 o_2$, simétrica de la primera y situada, como ella, en la región de las ordenadas positivas.

(Continuará).