TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

(Continuación de la página 56, número 114)

En resumen: si el movimiento ó construcción empieza, en el sentido positivo, por el punto $+\,{}^3/_2\,\pi$; lo dicho manifiesta que las dos series de valores

$$x=\begin{cases}+\,{}^3/_2\pi,\\ 0 \text{ ó } 2\pi,\\ +\,{}^1/_2\pi,\end{cases} \qquad\qquad y=\begin{cases}\pm\infty,\\ +1,\\ \pm\infty;\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}+\frac{1}{2}\pi,\\ \pi,\\ +\frac{3}{2}\pi,\end{cases}\qquad y=\begin{cases}\mp\infty,\\ -1,\\ \mp\infty,\end{cases}$$

producen dos ramas completas é infinitas, con formas simétricas ó congruentes, pero situadas, respectivamente, en las regiones de las ordenadas positivas y negativas.

Tanto por los cambios bruscos de $+\infty$ á $-\infty$, ó viceversa, que sufre la función, cuanto porque, en una misma rama de la curva correspondiente á los puntos de una circunferencia, bastan pequeñísimos aumentos de la abscisa para que la ordenada se haga de repente infinita; la expresión

$$y=\sec. x$$

es una *función discontinua* (nº 8).

6º Análogas consideraciones hechas respecto de la expresión

$$y=\text{cosc. } x,$$

manifiestan que la representa una curva, cuyas ramas son iguales á las originadas por la función secante; pero al contrario de ésta que, con relación á sólo una circunferencia, principiando con $x=0$ se forma de dos medias ramas simétricas por el lado de las ordenadas positivas, y de ótra completa por el de las negativas; las dos series

$$x=\begin{cases}0,\\ +\frac{1}{2}\pi,\\ +\pi,\end{cases}\qquad y=\begin{cases}\pm\infty,\\ +1,\\ \pm\infty,\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}+\pi,\\ +\frac{3}{2}\pi,\\ +2\pi,\end{cases}\qquad y=\begin{cases}\mp\infty,\\ -1,\\ \mp\infty,\end{cases}$$

descubren que, en aquélla, las dos ramas son completas: la úna en la región de las ordenadas positivas; y la ótra en la región de las ordenadas negativas (fig. 4, 3ª)

7º Si en la expresión

$$y = \operatorname{tg}. x$$

se consideran los valores en un mismo sentido de

$$x = 0, \ +\frac{\pi}{2},$$

se obtiene respectivamente

$$y = 0, \ +\infty;$$

por lo cual, para los valores positivos de las abscisas [fig. 4, (1ª)]

$$x = o^{\circ}a, \ o^{\circ}a_1, \ o^{\circ}a_2, \ldots\ldots o^{\circ}a_7 = +\frac{\pi}{2}$$

las ordenadas serán las respectivas líneas tangentes o, $o^{\circ}t$, $o^{\circ}t'$ $o^{\circ}t''$, ..., que darán los puntos o [ó el origen, para $x = o^{\circ}$, (fig. 5, 1ª)] a_1, a'_1, a'_2 ......; y resulta la rama oL de una curva continua; pero con la abscisa $+\frac{\pi}{2}$ la ordenada crece indefinidamente en el sentido positivo; esto es; *se hace infinita la función*

$$y = \operatorname{tg}. x.$$

Y como, para $x = +\frac{\pi}{2}$ es $y \pm \infty$, la variable, como en el caso de la secante, hace pasar *bruscamente* la función, de $+\infty$ á $-\infty$; es decir, que á un mismo tiempo se obtienen puntos de la curva á una distancia infinita en *la región de las ordenadas positivas y negativas.* De aquí que para los valores de

$$x = +\frac{\pi}{2},\ +\pi,\ +\frac{3}{2}\pi,$$

sean los de la función, respectivamente,

$$y = -\infty,\ 0,\ +\infty;$$

los que originan una rama L_1 0_1 L'_1, doble de la anterior, ó formada de dos partes congruentes, cada una, con ésta; rama que, cortando el eje de abscisas á la distancia $+\pi$ del origen, se dirige de la región de las ordenadas negativas á la región de las ordenadas positivas.

Como es asimismo, para $x = +{}^3/_2\pi$, $y = \pm\infty$; los valores de

$$x = +{}^3/_2\pi,\ 2\pi,$$

que completan la circunferencia, dan, respectivamente

$$y = -\infty,\ 0,$$

valores á que corresponde la media rama $L_2\,0_2$ simétrica de la primera, pero situada en la región de las ordenadas negativas.

En resumen: si el movimiento ó construcción empieza, en el sentido positivo, por el punto $+{}^3/_2\pi$, lo dicho manifiesta que las dos series de valores

$$x = \begin{cases} +{}^3/_2\pi, \\ 0 \text{ ó } 2\pi, \\ +{}^1/_2\pi, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \mp\infty, \\ 0, \\ \pm\infty, \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} +{}^1/_2\pi, \\ \pi, \\ +{}^3/_2\pi, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \mp\infty, \\ 0, \\ \pm\infty, \end{cases}$$

producen dos ramas completas, infinitas y congruentes, dirigiéndose, cada una, de la región de las ordenadas negativas á la región de las ordenadas positivas.

Se infiere que, por razones iguales á las indicadas en el caso de la secante, la expresión.

$$y = \text{tg}.\, x$$

es una *función discontinua.*

8º Análogas consideraciones hechas respecto de la expresión

$$y = \text{cot}.\ x,$$

manifiestan que la representa una curva, cuyas ramas son simétricas de las que se refieren á la función tangente; pero al contrario de ésta que, con relación á sólo una circunferencia, principiando con $x = 0$ se forma de dos medias ramas simétricas á úno y otro lado del eje de abscisas; y de ótra completa, que se dirige de la región de las ordenadas negativas á la región de las ordenadas positivas, las dos series

$$x = \begin{cases} 0, \\ +\frac{1}{2}\pi, \\ +\pi, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \pm\infty, \\ 0, \\ \mp\infty, \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} +\pi, \\ +\frac{3}{2}\pi, \\ +2\pi, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \pm\infty, \\ 0, \\ \mp\infty, \end{cases}$$

descubren que, en aquélla, las dos ramas son completas dirigiéndos cada una de la región de las ordenadas positivas á la región de las ordenadas negativas (fig. 5, 2ª)

9º Si

$$y = \text{sen. vers. } x;$$

como para

$$x = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad 2\pi, \ldots\ldots,$$

es

$$y = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 0, \ldots\ldots,$$

la forma será la que se muestra en la fig. 6: la curva $oMM'M''M'''M_4 \ldots\ldots$ representa la función senoverso, y en ella es

$$\frac{\pi}{2}M = \frac{3}{2}\pi M'' = \frac{5}{2}\pi M_4 = \frac{7}{2}\pi M_6 = 1 \ldots\ldots = 1 \ldots\ldots;$$

$$\pi M_1 = 3\pi M_5 = \ldots\ldots = 2.$$

La línea $N\ N_1\ N_2\ N_3\ N_4 \ldots\ldots$ representa la función cosenoverso.

10. La ecuación

$$f(x, y, z) = 0,$$

donde dos cualesquiera de las tres variables son las independientes, representará una superficie *plana* ó *curva* según la naturaleza de la función; porque la ecuación anterior puede tener la forma

$$z = f(x, y):$$

considerando pues, tres ejes rectangulares, cuyo origen esté en o (fig. 7); hágase en el plano xy, $x = oQ = a$, $y = oP = b$, y resultará que las paralelas á x, y trazadas por los puntos P y Q dan el A; por tanto, si por este punto se levanta una perpendicular al plano xy, haciendo $Z = AR = c$, de modo que resulte

$$c = f(a, b) = RA,$$

quedará determinado un punto R del espacio, según la ley

$$z=f(x,\ y),$$

De igual manera se pueden determinar otros puntos del espacio, los que corresponderán á una superficie plana ó curva.

Se sigue, que la función de más de dos variables independientes no podrá ser construída, por cuanto el espacio sólo tiene tres dimensiones; y si en la análisis se consideran tales funciones, no es sino teóricamente, ó porque en las aplicaciones de las ciencias prácticas, hay cuestiones que exigen estudios en esa forma.

IV

LIMITES DE LAS FUNCIONES

33. Observación.—El estudio que vamos á emprender es de la mayor importancia para la inteligencia de las matemáticas sublimes, y una preparación necesaria para los cálculos diferencial é integral.

Ya se ha dicho (nº 8), que en el límite de las funciones se consideran dos valores: el úno como principio de toda cantidad, el ótro como término supremo hacia el cual tiende una magnitud determinable.

34. El infinito.—Toda cantidad, una vez que su concepto importa aumento cuantitativo, si es *variable* puede principiar en *cero*, aumentar cada vez más y, finalmente, acercarse al *infinito*.

La palabra *infinito* designa ordinariamente la carencia de límites; y, filosóficamente, significa *un sér que posee todas las perfecciones posibles, y toda la realidad que se puede concebir y puede existir;* pero el *infinito matemático* es un concepto muy diferente; y así, al tratar del infinito, la cuestión que se propone la Análisis algébrica es muy distinta del *infinito filosófico.* De ninguna manera se ha de confundir el *infinito matemático* con el *infinito ontológico:* éste es un *sér determinado*, y el *número infinito*, ontológicamente considerado, es *absurdo ó imposible.* Al contrario, el infinito matemático significa sólo la posibilidad ó potencialidad de un *aumento indefinido ó sin límites cuantitativos en la magnitud;* y esta idea no puede ser absurda ó imposible, por no serlo el concepto de la cantidad, una vez que *es* cantidad *todo aquello que, por constar de partes*, **es susceptible de aumento ó diminución.** Luego, supuesta una cierta cantidad, puede haber *aumentos de aumentos*, de modo que jamás puede decirse que, con cualquiera de éstos, la magnitud haya llegado á su último grado ó valor: una tal magnitud carece, en este sentido, *de límites asignables* ó es un *infinito relativo.* Luego, no repugna en este supuesto, la idea del infinito que consideran las matemáticas; porque tal es el infinito filosófico *sincategoremático* ó *indefinido.*

Además, una magnitud que tenga el carácter de crecer sin límites, puede llegar ó alcanzar á un estado tal de valor, que no haya términos numéricos para expresar la relación que tenga con otra magnitud dada por grande que se la suponga, magnitud que, por lo mismo, llega á ser despreciable comparándola con aquélla; pues no la altera ni por adición, sustracción, multiplicación ó división: tal magnitud, tan grande como ha llegado á ser, no puede estar sometida á operación alguna con términos finitos por grandes que sean; y por esto se dice, con toda propiedad, que el *infinito no está sujeto á cálculo alguno: con el infinito no se calcula;* en esta virtud, cuando se tienen de ejecutar operaciones con cantidades infinitamente crecientes ó que se hacen infinitas, se les supone siempre un valor que, si bien puede considerarse como finito ó limitado, la magnitud, como variable verdadera que lo es, puede cambiar de valor creciendo indefinidamente ó acercándose al infinito.

Lo dicho manifiesta que la clase de infinito usado en las matemáticas no es el *infinito categoremático*, porque éste significa una magnitud actual, tan grande que ya no puede recibir aumento alguno, ó que carece de límites dentro de su género: la variación misma que se atribuye á las cantidades infinitamente crecientes, es contraria á ese supuesto.

35. Fundamento de la teoría del límite.— Todas las cuestiones en que se consideran cantidades variables que se acercan, por lo mismo, á un límite, se apoyan en el siguiente

Lema.—*Toda función antes del límite*, diferirá de él en un valor infinitamente pequeño, ó sea en una infinitésima.

Si

$$\text{lím. } f(x)=A,$$

se verificará antes del límite

$$f(x)=A\pm\alpha,$$

donde α, con el grado de aproximación de $f(x)$ al valor A, decrece hasta *cero*.

Demostración.—La idea del límite supone que $f(x)$ se acerque más y más á él; luego, antes del límite la función tendrá un valor distinto de A, aunque sea de una cantidad muy pequeña: sino hubiera tal diferencia antes del límite, se verificaría $f(x)=A$; y así $f(x)$ ya habría llegado á dicho límite, lo que es contra el supuesto de estar antes de él. Luego, si antes del límite la función difiere de A, el valor de ella no podrá ser sino de la forma $A\pm\alpha$, según que $f(x)$ se acerque á su límite creciendo ó decreciendo; y como llegando á éste adquiere sólo el valor A, es α una variable que por necesidad disminuye ó decrece hasta desaparecer ó hacerse igual á cero: esto significa

$$\text{lím.}\alpha=0,$$

y supone un estado de la función expresado por

$$\text{lím.} f(x)=A.$$

L. Q. D. D.

(Continuará)