TRATADO

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

POR EL MISMO PROFESOR

(Continuación de la página 64, número 114)

III. Veamos si sería más simple fijar la posición de un punto considerando sus distancias á planos indefinidos, como B, C, D, &?

Si el punto A debe estar á un metro, verbigracia, del plano B; como el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que distan un metro de un plano infinito, es otro plano que, á cada lado de ése, es paralelo al mismo á esta distancia; la condición puesta hace que el punto A se distinga de los demás que se hallen fuera de los dos planos paralelos al dado; pero puede ser uno de los infinitos puntos de cada uno de ellos; porque, en ambos, todos los puntos tienen la propiedad de distar un metro del plano B.

Si el mismo punto A debe hallarse á dos metros del plano C, por iguales razones tiene de ser uno de los infinitos puntos de dos planos, uno á cada lado de éste, paralelos y distantes del mismo dos metros. Pero como, por lo dicho antes, el punto se halla también sobre los otros dos planos paralelos al B, será uno de los muchos puntos comunes á los cuatro planos que, por el supuesto se cortan dos á dos; mas, cuatro planos que se cortan dos á dos determinan cuatro rectas, que son las únicas que contienen los puntos comunes á los dos sistemas de planos paralelos. Luego el punto en cuestión queda sujeto á ser uno de los muchos puntos de estas cuatro rectas, secciones comunes de los dos sistemas; distinguiéndose ya de las demás de cada par.

Si por una tercera condición el punto debe hallarse á tres metros del plano D, se comprende que ha de ser alguno de los infinitos puntos de los planos, uno á cada lado de éste, paralelos y distantes del mismo tres metros; pero por estar, como ya se ha visto, en una de las cuatro líneas rectas, intersecciones de los dos sistemas de planos paralelos, será uno de los puntos comunes entre los dos últimos planos y las dichas cuatro rectas. Mas, los dos planos pueden ser cortados por las cuatro rectas en *ocho puntos*, á saber, cuatro en cada plano; y de aquí que el punto de que se trata se distinga de los infinitos puntos del espacio, y sea uno de los ocho así determinados; pero no se sabe cual de ellos si no se añade alguna otra condición: por ejemplo, si al tratarse del primer plano se indica el lado por el que se halla el punto á la distancia de un metro, entonces basta considerar, en vez de dos, un sólo plano por ese lado, á la distancia de un metro de de aquel plano. Si al tratarse del plano C, también se indica el lado por el que se halla el punto á la distancia de dos metros, bastará asimismo suponer por ese lado sólo un plano que diste dos metros del C; el cual, cortándose por el supuesto con el paralelo al plano B, determina una recta en la que se hallará el punto de que se trata. Finalmente, si también se indica el lado por el que está el punto respecto del plano D, bastará uno sólo por ese lado y á la distancia dada, paralelo al D; y como el punto se encuentra en la recta intersección mencionada, será el en que la recta corte el plano paralelo á éste: el punto no puede ya confundirse con ningún ótro del espacio; *y queda por lo tanto completamente determinado.*

Se ve pues, que, si bien son los puntos más sencillos que las rectas; y las rectas, extensiones más sencillas que los planos, hay mayor facilidad en referir un punto del espacio á planos que á puntos y rectas, para determinarlo de posición: basta considerar las distancias á tres planos y el sentido en que se deban tomar. Tal es el procedimiento que se sigue en la aplicación del álgebra á la geometría ó Geometría analítica mencionada ya (nº 2). Pero en la Geometría descriptiva usada desde muy antiguo, se ha simplificado mucho el procedimiento; y así, en vez de tres planos, explícitamente por medio de las proyecciones no son necesarios sino dos.

Hasta aquí las ideas del Sr. Monge sobre la *determinación de un punto:* añadimos que es tal la simplificación introducida en la Geometría descriptiva que, como lo veremos, se hace la determinación reduciéndose á úno los dos planos; de manera que bien puede afirmarse, que *basta para el objeto un solo plano.*

LIBRO I

PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

I

DEL PUNTO

16. NOCION DEL PUNTO.—Se sabe que *un* punto *es el lugar de la intersección de dos líneas.* Luego el punto no tiene ninguna extensión, pues que carece de dimensiones; y por eso se ha dicho, con toda propiedad, que *es el cero de la magnitud geométrica.* De aquí que el *punto se lo considere sólo como un sér relativo para determinar el lugar, ó la dirección* cuando hayan más de úno; y que se lo pueda en todo caso suponer como *el límite de una línea.*

17. **PROYECCION DE UN PUNTO.**—En la acepción más general la *proyección de un punto es ótro en que una recta, que pasa en ciertas condiciones por aquél, toca en una línea ó superficie cualquiera:* la recta que verifica la proyección se la llama *línea proyectante;* si toca en una línea, ésta generalmente se la considera recta, y recibe entonces el nombre de *eje;* y cuando en una superficie, el de *plano de proyección* si se considera como tal un plano.

Por lo dicho al final del número anterior, mediante las proyecciones los tres planos necesarios para fijar la posición de un punto, se reducen á dos y, si se quiere, á úno solo: de aquí la grande importancia que en la Geometría descriptiva tienen las proyecciones sobre planos; pues que esta rama de las matemáticas, prescindiendo del cálculo algébrico, por decirlo así, ó considerándolo apenas ocasionalmente, trata de las cuestiones indicadas en los núms. 11 y 13, resolviéndolas por medio de las proyecciones.

18. **CLASES DE PROYECCIONES.**—Pueden ser recta ú ortogonal - del griego ὀρθός recto, y γῶνος ángulo - oblicua y polar:

Proyección recta ú ortogonal ó, simplemente, *proyección de un punto sobre un plano es aquél en que la línea proyectante del punto dado toca perpendicularmente en el plano:* como el punto así determinado en éste se lo llama entonces *pie*, se puede también decir, que tal proyección *es el pie de la perpendicular trazada por el punto al plano:* en la fig. 3 si se supone Aa perpendicular al plano P, será a la proyección recta ú ortogonal del punto A sobre tal plano; y Aa, la *línea proyectante del punto.*

Proyección oblicua de un punto sobre un plano es aquél en que la línea proyectante del punto dado, paralelamente á una cierta dirección, encuentra con el plano: en la misma figura, supuesta la dirección MN, es b la proyección oblicua del punto B; y Bb su proyectante oblicua.

Proyección polar de un punto sobre un plano es aquél *en que la línea proyectante del punto dado, pasando por ótro fijo de posición, encuentra con el plano:* el punto fijo se lo llama *polo;* y la línea, *proyectante polar.*

La proyección ortogonal es generalmente la empleada en Geometría descriptiva; de manera que en todas las cuestiones de que tratemos en este curso supondremos, mientras no se indique lo contrario, esa proyección. Advertimos que, á más de usársela en varias secciones de las matemáticas puras, se sirven de ella algunas partes de las aplicadas, como la geodesia en el *dibujo de planos y mapas.*

De la proyección oblicua se hace uso en ciertas aplicaciones de la Geometría descriptiva, por ejemplo en la *teoría de las sombras*, cuando, queriendo representar la parte iluminada de un cuerpo, se supone le llegan los rayos luminosos en una cierta dirección.

El ejemplo más cumplido de la proyección polar lo ofrece la perspectiva lineal de que hemos tratado ya (nº 9): así, considerando C (fig. 2) como el plano de proyección, a, b, e son las proyecciones polares de los puntos A, B, E respecto del polo O; y AO, BO, EO, las proyectantes polares: lo mismo vale para los demás puntos del dibujo que manifiesta la figura. De la proyección polar se usa igualmente en el *dibujo de planos y mapas*, cuando se sigue el método *estereográfico.*

19. **PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.**—En las clases de proyecciones indicadas, y aun en cualesquiera ótras que se imaginen, resulta que

I. *Dado un punto del espacio y el plano en que se lo ha de proyectar*, **queda completamente determinada la proyección del punto.**

Porque siempre se puede dirigir en las condiciones dadas y por el punto que se considera, una línea que encuentre con el plano de proyección: la línea será entonces la proyectante; y el punto de encuentro, la proyección que se busca.

La recíproca de la proposición que antecede no es cierta; y así

II. *Dado en un plano un punto, como proyección de* *ótro del espacio sobre el plano,* **el punto del espacio no queda con eso determinado.**

Porque, supuestas ciertas condiciones, el punto proyección determina una línea proyectante, cuyos puntos, infinitos en número, se proyectan en aquél, ó tienen todos por proyección el punto dado. Luego no hay en la línea un punto definido, quiere decir, que tenga el solo por proyección el punto del plano.

20. **PRINCIPIO DE LOS DOS PLANOS.**—Pero *si en cada úno de dos planos se da la proyección de un punto del espacio,* **este punto queda completamente determinado.** Porque debiendo encontrarse el punto del espacio en cada úna de las líneas proyectantes que corresponden á las proyecciones supuestas, será el que tengan ellas común; es decir *el punto donde se corten las líneas;* y como "dos rectas que se cortan determinan un plano", el principio será cierto sin excepción, cuando, no siendo paralelos dichos planos, las líneas proyectantes se hallen en ótro, circunstancia que, como se verá, las sujeta á condiciones particulares que se podrán fijar en cada caso; y esto nos conduce, como por la mano, á tratar de los

21. **PLANOS DE PROYECCION.**—Llámanse así *dos planos que, convenientemente relacionados, sirven para fijar la posición de un punto, de una serie de puntos ó de una figura cualquiera del espacio, mediante las proyecciones en ellos determinadas;* y viceversa: *dadas las figuras del espacio, se determinan sobre ellos, mediante las proyecciones, los elementos geométricos necesarios para resolver las cuestiones que acerca de dichas figuras se presenten.*

22. **SISTEMA RECTANGULAR.**—Tales planos, que los supondremos siempre indefinidos, se cortan formando un ángulo diedro cualquiera; pues que sólo entonces quedará determinado un punto del espacio: si los planos fueran paralelos no existiría ó, mejor dicho, sería ó quedaría indeterminado este punto, por resultar paralelas entre sí las líneas proyectantes. Mas, cortándose los planos, se cortarán esas líneas, y se cumplirá con lo dicho

en el nº 20, sea cual fuere la magnitud del ángulo diedro: en lo que sigue, no obstante, se supone recto tal ángulo; quiere decir, que los planos se cortan perpendicularmente, circunstancia que no influye en la generalidad de las cuestiones que nos propenemos resolver.

23. **DESIGNACION DE LOS PLANOS: LINEA DE TIERRA.**— Si suponemos que XTX_1, YTY_1 (fig. 4) sean los planos de proyección que se cortan perpendicularmente en la línea LT; pudiendo úno de ellos tener cualquiera dirección, se lo puede imaginar como coincidiendo con el horizonte ó siéndole, á lo menos, paralelo; en cuyo caso el ótro, por su perpendicularidad con el primero, tiene de ser vertical al mismo horizonte. De aquí los nombres de *plano horizontal de proyección* ó, simplemente, *plano horizontal; plano vertical de proyección* ó, simplemente, *plano vertical* con que se los designa: supondremos en lo que sigue ser XTX_1 el *plano horizontal;* y YTY_1, el *plano vertical.* Por esto es que se llama **línea de tierra** *la recta en que se cortan los planos de proyección:* nombre muy propio; pues que un plano vertical corta el horizonte en una línea que se halla necesariamente en la tierra: tal intersección es en verdad *una línea de tierra;* y como que el plano horizontal es respecto de las representaciones, lo que el horizonte relativamente á los objetos; por analogía la intersección del planó vertical con aquél debe llamarse *línea de tierra:* en la figura es LT la línea de tierra.

Sin embargo de estas explicaciones, los planos de que tratamos y su línea de insersección conservan esos nombres, aunque dichos planos, lejos de tener la dirección supuesta, que es la más natural, tuvieran cualquiera ótra, dado que siempre sean perpendiculares entre sí.

24. **ANGULOS DIEDROS.**—Por ser, como ya se ha dicho, indefinidos tales planos (nº 22), al cortarse ortogonalmente dividen el espacio en cuatro regiones iguales ó ángulos diedros rectos, á saber $XLTY$, $YLTX_1$, X_1LTY_1, $XLTY_1$; ángulos que, según la posición en

que se los quiera considerar para el estudio, se los determina llamándolos:

por su orden natural, según la numeración de la figura,

primero, segundo, tercero, cuarto;

por la posición relativa,

principal, de atrás, opuesto, de abajo;

y simbólicamente

$\overset{\frown}{\mathrm{AS}}$=*anterior superior*, $\overset{\frown}{\mathrm{PS}}$=*posterior superior*, $\overset{\frown}{\mathrm{PI}}$=*posterior inferior*, $\overset{\frown}{\mathrm{AI}}$=*anterior inferior*,

denominaciones de que usaremos según los casos; pero con preferencia de las dos primeras.

25. **DESIGNACION DE LAS PROYECCIONES.**—Si, como en la fig. 4, llamamos A un punto del espacio, y lo suponemos situado en el ángulo diedro primero ó principal XLTY; trazando por el punto las líneas proyectantes respecto de cada uno de los planos, los pies a, a′ de ellas, serán (nº 18) las proyecciones del punto; y se las califica de *horizontal* ó *vertical* según el plano donde están situadas. Así que, *proyección horizontal de un punto, es su proyección sobre el plano horizontal;* y *proyección vertical, la proyección del punto sobre el plano vertical:* de esta manera es a la proyección horizontal del punto A, determinada por la proyectante vertical Aa; y a′ la proyección vertical del mismo; determinada por la Aa′, proyectante horizontal ó perpendicular al plano vertical.

(Continuará)