TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD
CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

(Continuación de la página 155, número 115)

Nota.—Esta cualidad de las funciones ó variables decrecientes, expresada por

$$\text{lím. } \alpha = 0,$$

constituye el carácter de los infinitamente pequeños ó infinitésimas.

Esto supuesto, el teorema fundamental de los límites es el siguiente:

Si dos funciones ó cantidades variables son constantemente iguales acercándose á sus límites, **estos límites serán iguales.**

Si con $f[x]$, $f_1[x]$ se verifica constantemente

$$f[x]=f_1[x];$$

y es

$$\text{lím. } f[x]=A, \qquad \text{lím. } f_1[x]=B,$$

se verificará también

$$\text{lím. } f[x]=\text{lím } f_1[x], \qquad \text{ó} \quad A=B.$$

Demostración 1ª—Dos cantidades variables, constantemente iguales, tienen siempre los mismos valores; luego sus límites, que no son otra cosa que algunos de estos valores, no podrán menos de ser iguales.

2ª—Como $f[x]$, $f_1[x]$ pueden acercarse á sus límites respectivos creciendo ó decreciendo, para las diferencias infinitésimas α y β que les correspondan en las cercanías del límite, se tendrá, en virtud del lema precedente,

$$f[x]=A\pm\alpha, \qquad f_1[x]=B\pm\beta;$$

y, como es por hipótesis

$$f[x]=f_1[x],$$

se sigue

$$A\pm\alpha=B\pm\beta, \qquad \text{ó} \quad A-B=\mp[\alpha-\beta].$$

La ecuación última dice:

1º, que la diferencia entre A y B es igual á la diferencia que hay entre α y β;

2º, que, como α y β son cantidades indeterminadas, por ser variables que se hacen cada vez más pequeñas, si no es *cero su diferencia*, ésta será otra indeterminada ó *variable decreciente;* al paso que, por ser A y B cantidades determinadas ó constantes, si no es *cero su diferencia*, será un *número determinado ó constante;* número que tiene, por lo mismo, naturaleza muy diferente de la que caracteriza la diferencia anterior. Por tanto, si no es cero cada uno de los miembros de la última ecuación, ésta expresaría un absurdo, á saber, la igualdad entre una cantidad constante y una variable; pero tal ecuación es verdadera, según los procedimientos de que se ha inferido; luego existe una verdadera igualdad en el sentido de las cantidades que en la ecuación se consideran; mas, *sólo cero puede satisfacerla:* luego

$$A - B = 0, \qquad \text{ó} \qquad A = B.$$

ó $$\text{lím. } f[x] = \text{lím. } f_1[x].$$

L. Q. D. D.

Nota.—El límite de una cantidad se expresa simbólicamente de la manera indicada: para significar pues, que se considera el límite de X, se escribe

$$\text{lím. } X.$$

36. Signos de cantidades.—Para consultar la sencillez en el curso de esta obra, convendremos en representar las cantidades capaces de un aumento indefinido, por las últimas letras del alfabeto griego, $\omega, \tau, \rho, \ldots$; y las que decrezcan indefinidamente, por las letras primeras del mismo alfabeto, como $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Y nótese, de conformidad con lo dicho en el final del nº 34, que cualquier cantidad designada con algunos de los símbolos puestos, es una magnitud en cierto sentido finita todavía, si bien tiene el carácter manifestado por el símbolo que se emplee: el *límite* mismo se lo señalará, ó de la manera puesta en la *nota* precedente, usando las iniciales de la palabra, ó con los símbolos propios de *cero* é *infinito*, según la naturaleza de la cantidad.

37. Cero é infinito.—Si, como ya se ha dicho, toda cantidad puede absolutamente variar sólo entre dos valores por ser éstos extremos [núms. 8 y 33], es manifiesto que de ellos debemos preferentemente ocuparnos, y se obtienen, como resultado, cuando la magnitud se aproxima á *cero* ó tiende al *infinito:* en el primer caso puede suceder que la magnitud adquiera en verdad el valor *cero,* ó sólo se acerque indefinidamente á él, aproximación que constituye lo *infinitésimo* ó *infinitamente pequeño* de Leibnitz; en el segundo caso, la variable recibirá un valor mayor que toda cantidad asignable, quiere decir, un valor más allá del cual no hay otro superior expresado en términos finitos, por grande que se lo considere; y por esto la magnitud, con toda propiedad, se la llamará *infinita.*

En este supuesto, se usa ó emplea el símbolo *o* para designar el límite hacia el cual tiende una cantidad que, por sustracción ó división repetida, pasa por valores ó estados menores cada vez; y así, por cuanto dicha cantidad disminuye más y más, concluirá por ser inferior ó menor que toda otra determinada absoluta, por pequeña que se la suponga; lo que no puede verificarse sino porque la magnitud de que se trata *tiende á desaparecer en cuanto al concepto de cantidad;* y si esto es así, la magnitud *se hace ó tiende á hacerse cero,* que es lo único que puede ser menor que toda cantidad tan pequeña como se quiera, pero siempre determinada.

En el caso de crecer sin límites ó indefinidamente una magnitud, es manifiesto que no hay valor fijo, tan grande como se lo suponga, capaz de ser mayor que ella; luego no hay límite cierto al cual se aproxime: quiere decir, que será siempre mayor que toda cantidad determinada tan grande como se quiera, luego *tiende ó se aproxima la magnitud al infinito,* que es lo único que puede ser mayor que toda cantidad finita por grande que sea: en este sentido la magnitud de que se trata adquiere ó tiende á adquirir todo el aumento posible que en el concepto de cantidad le corresponde.

Esto supuesto, sentamos los siguientes

TEOREMAS

1. *Un cociente es cero* **si el dividendo es cero y el divisor distinto de cero: ó si éste se hace infinito y aquél es distinto del infinito.**

Decimos que debe ser

$$\frac{0}{a}=0, \qquad \frac{a}{\infty}=0.$$

Demostración: 1º—Si a es una cantidad constante y α una variable decreciente hasta cero, el producto

$$a \,.\, \alpha,$$

disminuye con el factor α; pues que para

$$\alpha=\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots .$$

el producto es la décima, centésima, milésima, &.ª parte de a; y por esto, decreciendo indefinidamente el factor α, el producto decrecerá asimismo. Luego, si ε es un número que disminuye con α indefinidamente, podemos escribir

$$\varepsilon=a \,.\, \alpha \qquad \text{ó} \qquad \frac{\varepsilon}{a}=\alpha,$$

ecuaciones que se verifican rigurosamente para todos los estados de valor adquiridos por las cantidades en ellas consideradas; luego se verificarán en el límite; y será

$$\frac{\text{lím. } \varepsilon}{a}=\text{lím. } \alpha.$$

ó $$\frac{0}{a}=0. \qquad (a)$$

Q. D. L. 1º

2º Se sabe que un número no padece alteración si se lo multiplica y divide por cantidades iguales: así, el número constante *a* puede escribirse

$$a=\frac{1.a}{1}=\frac{10.a}{10}=\frac{100.a}{100}=\ldots.$$

ó $$a=[1.a].\frac{1}{1}=[10.a].\frac{1}{10}=[100.a].\frac{1}{100}=\ldots; \qquad (b)$$

por tanto, si es ω un factor que puede crecer como

$$1.a,\quad 10.a,\quad 100.a,\quad 1000.a,\ \ldots;$$

y α ótro que pueda disminuirse como

$$1,\quad \frac{1}{10},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{1000},\ \ldots.$$

y sin límites úno y otro factor, según la naturaleza creciente ó decreciente de los mismos, pero siempre en la razón puesta; la forma [b] se puede escribir con más generalidad,

$$a=\omega.\alpha, \qquad ó \qquad \frac{a}{\omega}=\alpha,$$

ecuaciones rigurosas para todos los estados de las cantidades supuestas. Luego será en el límite

$$\frac{a}{\text{lím.}\ \omega}=\text{lím.}\ \alpha,$$

ó $$\frac{a}{\infty}=0. \qquad (c)$$

Q. D. L. 2º

Corol.—Las expresiones [a] y [c] manifiestan, que *un cociente disminuye sin límites y se hace menor que toda cantidad asignable,* **si el dividendo decrece indefinidamente, ó crece sin límites el divisor.**

Nota.—Si ambos, dividendo y divisor, aumentan ó disminuyen simultáneamente, nada se podrá afirmar acerca del cociente. Porque

$$\frac{\infty}{\infty} \quad y \quad \frac{0}{0}$$

son formas cuyo valor puede ser el *infinito*, ó *un número determinado cualquiera, ó cero:* tales formas, como se sabe y se verá, son *signos ó símbolos de indeterminación.*

Cuestión.—¿Cuál será el valor del cociente

$$\frac{0}{\infty}?$$

Respuesta.—Por el dividendo es, según lo 1º, *cero* ese valor; y por el divisor es también *cero* en virtud de lo 2º Luego la forma puesta tiene *á fortiori* un valor igual á cero.

II. *Un cociente es infinito* **si el dividendo es el infinito y el divisor distinto del infinito; ó si éste se hace cero y aquél es distinto de cero.**

Decimos que

$$\frac{\infty}{a}=\infty, \qquad \frac{a}{0}=\infty.$$

Demostración: 1º—Si ω es un número indefinidamente creciente, de modo que puede ser

$$\omega = 1,\ 10,\ 100,\ 1000 \ldots,$$

y a una cantidad constante, el producto

$$a \cdot \omega$$

crece con el factor ω; porque, en virtud de la suposición hecha, el producto

$$a.\omega = 1.a,\ 10.a,\ 100.a,\ 1000.a, \ldots$$

es *diez*, *ciento*, *mil*, &ª, veces a. Luego, si es τ un número que crece con ω indefinidamente, podemos escribir

$$\tau = a.\omega, \quad \text{ó} \quad \frac{\tau}{a} = \omega,$$

ecuaciones que se verifican rigurosamente, para todos los estados de valor que adquieren las cantidades en ellas consideradas; luego se verificarán en el límite; y será

$$\frac{\lim. \tau}{a} = \lim. \omega$$

ó

$$\frac{\infty}{a} = \infty \qquad \text{(d)}$$

Q. D. L. 1º

2º Por el caso 2º del *teor.* anterior; se sigue inmediatamente

$$\frac{a}{\alpha} = \omega,$$

ecuación rigurosa, como se sabe; luego se verificará en el límite: es así

$$\frac{a}{\text{lím. } \alpha} = \text{lím. } \omega$$

ó
$$\frac{a}{0} = \infty \qquad (e)$$

Q. D. L. 2º

Corol.—Las expresiones [d] y [e] manifiestan que *un cociente aumenta sin límites, ó se hace mayor que toda cantidad asignable*, si el dividendo crece indefinidamente, ó disminuye sin límites el divisor.

Cuestión.—¿Cuál será el valor del cociente

$$\frac{\infty}{0}?$$

Respuesta.—Por razón del dividendo es, según lo 1º, infinito ese valor; y, por razón de lo 2º, es también infinito considerado el divisor. Luego, la forma puesta tiene *á fortiori* un valor infinito.

(Continuará)