# TRATADO

DE

# GEOMETRIA DESCRIPTIVA

POR EL MISMO PROFESOR

Continuación de la página 163, número 115

**NOTA.**—En todo lo que siga procederemos de la manera que acabamos de hacerlo; esto es: designando un punto del espacio con una letra mayúscula, con la minúscula del mismo nombre se indicará la proyección horizontal; y con la misma, llevando un acento ó índice en la parte superior de la derecha, símbolo de la palabra *prima*, la proyección vertical: estas dos letras separadas por un guión designarán en lo escrito el punto del espacio, que tendrá por nombre el de la letra mayúscula correspondiente. Así, en el caso de la figura, el punto dado es A ó a—a′; para otro punto cualquiera tendríamos, por ejemplo, b—b′ ó B.

**26. CONSECUENCIAS.**—De lo expuesto se infieren las siguientes:

1ª *El plano determinado por las proyectantes de un punto del espacio*, **es perpendicular á la línea de tierra.** Pues que siendo á un tiempo Aa, Aa′ respectivamente perpendiculares á los planos de proyección, como se sabe, que "si por una recta perpendiculor á un plano se hace pasar ótro, éste será también perpendicular al primero"; respecto del plano $Aa_0$ determinado por dichas proyectantes, resulta á un tiempo

$$\text{pla. } Aa_0 \begin{array}{l} \perp XLT, \\ \perp YLT; \end{array}$$

mas, "si dos planos se cortan perpendicularmente á un tercero, la intersección común es perpendicular á éste," se tiene, respecto de los dos planos de proyección, lo que se quería demostrar, es á saber:

$$LT \perp \text{pla. } Aa_0, \text{ ó, lo que es igual, pla. } Aa_0 \perp LT.$$

2ª *El plano* **que dichas proyectantes determinan, es un rectángulo.** Porque, siendo $aa_0$, $a'a_0$ las intersecciones del plano $Aa_0$ con los de proyección, se hallan dichas intersecciones en ese plano, pasando por $a_0$ que en él no es sino el pie de la línea de tierra; y como que "una recta perpendicular á un plano, lo es á todas las ótras que se cruzan por el pie de aquélla en este plano", resulta evidentemente

$$LT \begin{array}{l} \perp aa_0, \\ \perp a'a_0; \end{array}$$

y así que el ángulo $aa_0a'$ sea el rectilíneo del diedro XLTY [1]. Por tanto,

$$\sphericalangle a_0 = R, \quad \sphericalangle a = R, \quad \sphericalangle a' = R; \quad \text{luego } \sphericalangle A = R;$$

y así es $Aa_0$ un rectángulo: de esta manera

$$Aa = a'a_0, \quad Aa' = aa_0.$$

Luego:

3ª *La altura de un punto sobre el plano horizon-*

---

1 Se sabe que "el ángulo rectilíneo de un diedro es aquél cuyos lados, siendo en un mismo punto perpendiculares á la arista, se hallan respectivamente en las caras del diedro"; por lo cual ese ángulo es la medida ó tiene el mismo valor del diedro.

*tal*, es igual á la distancia que hay de la proyección vertical á la línea de tierra.

4ª *La distancia de un punto al plano vertical*, es igual á la distancia que hay de la proyección horizontal á la línea de tierra.

5ª *La distancia de un punto á la línea de tierra* es igual á la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son las distancias del punto á los planos de proyección. Porque si imaginamos unidos A con $a_0$ y a con a′, la $Aa_0$ será esa distancia y la aa′ esta hipotenusa; y por ser las diagonales del rectángulo $Aa_0$, es evidente que $Aa_0 = aa'$.

6ª *Las perpendiculares trazadas de las proyecciones á la línea de tierra*, la cortan en un mismo punto. Pues, por la *Consª* 2ª, se ve que estas perpendiculares son justamente las intersecciones del plano de las proyectantes del punto del espacio, con los planos de proyección; intersecciones que, por necesidad, se unen en $a_0$, pie de la línea de tierra respecto de dicho plano.

NOTA.—Si llamamos *d* la distancia del punto á la línea de tierra; *x*, la que lo separa del plano vertical, proyectante que bien puede recibir el nombre de *abscisa;* y y la altura del mismo punto sobre el plano horizontal, proyectante que puede designarse con el nombre especial de *ordenada;* las consecuencias 5ª, 4ª y 3ª se expresarán analíticamente por

$$d=\sqrt{x^2+y^2}, \quad x=\sqrt{d^2-y^2} \quad y=\sqrt{d^2-x^2} \qquad (2)$$

27. REBATIMIENTO DE LOS PLANOS DE PROYECCION.— Como no es de un uso fácil el manejo de dos planos de la manera supuesta (nº 22), pero sí el de uno solo como plano de dibujo; pues que una hoja de papel, por ejemplo, se halla con este fin en todas partes; recordando el propósito de la ciencia (nº 11), es necesario inquirir la manera de representar sin ambigüedad en un solo plano todo lo hecho hasta aquí con dos; procedimiento que consistirá en procurar que ese plano contenga de una manera invariable lo que hay en los dos planos; luego tienen de reducirse á úno los dos planos de proyección;

y, recíprocamente cuando fuere necesario, transformar el úno en dos; y si esto es posible, hay mucha verdad en lo afirmado al final del nº 15: el medio existe en efecto; pues lo primero se consigue con el método llamado de *rebatimiento* ó *abatimiento de los planos de proyección;* y con el inverso, lo segundo.

Llámase pues, **rebatimiento** *la operación en virtud de la cual, suponiendo fijos el úno de los planos de proyección y la línea de tierra, al rededor de ésta, como charnela, gira el ótro hasta coincidir con aquél, formando los dos un solo plano.*

28. **EFECTOS DEL REBATIMIENTO.**—Podemos en este supuesto hacer girar el plano vertical de proyección al al rededor de la LT (fig. 4), en la dirección que indica la flecha f, hasta coincidir con el horizontal; y así resulta un solo plano dividido por esa línea en dos partes ó secciones: de esta manera, todo lo que hay en la región superior del plano vertical, *sin cambio alguno respecto de la línea de tierra,* se coloca en la posterior $LTX_1$ del plano horizontal; y todo lo que hay en la parte inferior de ese plano, llega á estar de igual manera en la anterior LTX de éste. Pero se puede también suponer que, fijo de posición el plano vertical, gira el horizontal al rededor de la LT, en la dirección que indica la flecha f', hasta coincidir con aquél: de esta manera, todo lo que hay en la región posterior del plano horizontal, *sin cambio alguno respecto de la línea de tierra,* se coloca en la superior LTY del plano vertical; y todo lo que hay en la región anterior de ese plano, llega á estar de igual manera en la inferior $LTY_1$ de éste; con lo que resulta un solo plano, que la línea de tierra lo divide en dos partes ó secciones, y lo podemos llamar el *plano de rebatimiento.*

Por ser lo más natural, supondremos que el rebatimiento se verifica de la manera última; pues que, para ver con más claridad los dibujos, se ponen naturalmente verticales los planos que los contienen.

*En resumen:* después de la operación que hemos explicado sólo existe un plano, el *plano de rebatimiento,* á que se reduce el diedro ó cuadrante primero ó principal; y una línea que lo divide en dos partes, que bien podemos suponerlas iguales: de esta línea arriba se halla ó imagina el plano vertical de proyección ó, mejor dicho, su parte visible, que es la *superior;* y de la línea abajo, el plano horizontal de proyección ó, mejor dicho, su parte visible, que es la *anterior;* pues se comprende que, por el rebatimiento, y suponiendo opacos los dos planos, desaparen, en virtud de la coincidencia, las regiones posterior de éste y la inferior de aquél: los dos planos de proyección en esta forma diremos que están *en descriptiva;* y así los supondremos siempre, á menos que indiquemos otra cosa: la recta que divide en dos partes el plano en descriptiva ó rebatimiento, es la línea de tierra.

**NOTA.**—En lo que sigue inmediatamente, los razonamientos que hagamos respecto de a [fig. 4] suponiendo que gira el plano horizontal, se pueden hacer inversamente con a′ si se supone el giro del plano vertical.

En esta virtud sentamos el siguiente

**Teor.**—*Si un punto está referido á los planos de proyección,* **las proyecciones del punto después del rebatimiento determinan una línea perpendicular á la de tierra.**

**Demostración.**—En efecto, suponiendo que en la figura citada no haya más que las líneas y puntos del cuadrante primero; por ser la $aa_0 \perp LT$ [nº 25, Conscª 2ª], al girar el plano horizontal según la flecha f′, hasta coincidir con el vertical, todos los puntos de aquél, y por consiguiente el a, describen un cuadrante de círculo, sin cambiar de posición relativa respecto de la línea ó charnela LT; por lo que la $aa_0$ será un radio que, en sus posiciones sucesivas, desde la primera $aa_0$ hasta la última $a_1 a_0$, conservará con LT la perpendicularidad indicada: llegando pues, á ser el a el punto $a_1$, ó en el momento de confundirse los dos planos, como por lo visto en la misma *consecuencia*, es también la $a'a \perp LT$, tales perpendiculares, $a_1 a_0$, $a'a_0$, tienen en ella y en el mismo plano, en el plano de rebatimiento, el punto $a_0$ común; pero se sabe, que "en el mismo plano y en un punto de una recta no se le puede levantar más que una sola perpendicular";

luego las dos $a_1 a_0$, $a'a_0$ son una sola y misma recta, ó es la úna la prolongación por $a_0$ de la ótra; y viceversa. Por tanto, y en virtud del rebatimiento, las rectas $aa_0$, $a'a_0$ se transforman en la

$$a_1 a_0 a' \quad \text{ó} \quad a_1 a' \perp LT.$$

L. Q. D. D.

Como se ha dicho en la nota precedente, si el razonamiento se aplica al punto $a'$ girando el plano vertical según la flecha f, después de un cuadrante de círculo estará $a'$ en $a'_1$; y la línea $aa_0a'_1$ será idénticamente la $a_1 a'$; por lo cual

$$aa_0a'_1 \quad \text{ó} \quad aa'_1 \perp LT.$$

En consecuencia, si prescindimos de los índices 1, 1 necesarios para señalar no más que las nuevas posiciones de a ó a' en la misma figura, siendo ésta por el rebatimiento ó en descriptiva idénticamente la figura 5, é idénticos los puntos a, a' á los de aquélla; tales puntos no serán sino las proyecciones de otro A del espacio; y *se hallarán enlazados por la recta aa' perpendicular á la línea de tierra LT.*

## OBSERVACIONES

1.ª Se ve qus la línea aa' es la suma de las proyectantes Aa, Aa' del punto A [fig. 4]: por eso es que se la llama la *línea de las proyectantes* y tambièn la *línea de correspondencia;* de modo que se da este nombre á *la recta que en descriptiva, une las proyecciones de un mismo punto del espacio.*

2.ª En descriptiva no existen los puntos y figuras del espacio: sólo permanecen los planos de proyección confundidos en el plano de rebatimiento, la línea de tierra dividiéndolo en dos partes iguales y las proyecciones de esos puntos y figuras.

**29. ENHIESTAMIENTO DE LOS PLANOS DE PROYECCION** [1].—Inversa de la anterior [nº 27], llámase así *la operación en virtud de la cual, estando rebatidos los planos de proyección y suponiendo fijos el úno y la línea de tierra, se separa y al rededor de ésta, como charnela, gira el ótro hasta volver los dos á su posición natural, ó dividir el espacio en cuatro regiones iguales ó ángulos diedros rectos:* los planos de proyección en esta forma, diremos que están en *perspectiva caballera* [nº 8]; y aunque de ordinario los supongamos en descriptiva, como ya se ha dicho, para auxiliar la inteligencia de algunas cuestiones, sobreentendiéndose el enhiestamiento, supondremos á las veces los planos de proyección en perspectiva: quiere decir, que de la figura 5 resulta la figura 4.

En esta virtud podemos demostrar la recíproca de la proposición anterior, sentando el siguiente

**Teor.**—*Si dos puntos en descriptiva determinan una línea perpendicular á la de tierra,* **los dos puntos serán proyecciones de ótro del espacio.**

Decimos que si $aa' \perp LT$ [fig. 5], los a, a', dados en descriptiva, serán necesariamente proyecciones de un punto A del espacio.

**Demostración.**—Porque levantando en la intersección $a_o$ de la $aa'$ y LT una línea perpendicular á ésta en el espacio, el plano determinado por ella y la $aa'$ será perpendicular á la LT; y, por lo mismo, perpendicular á cada uno de los planos de proyección ó, mejor dicho, al plano de rebatimiento, único que existe; pues que están en descriptiva esos dos planos. Levántense además, por a, a' perpendiculares á ese plano, las que serán por esto para-

1 Si con la palabra *rebatimiento* se significa el hecho de confundirse en úno los planos de proyección, nada más natural que inventar un término conforme á la índole del idioma, para significar la operación contraria; y ninguno juzgamos más adecuado que el de *enhiestamiento*, formado de *enhiesto* part. pas. de *enhestar* que, en el caso actual, significaría *levantar*, *poner derecho el úno de los planos de proyección respecto del ótro, cuando antes habian estado confundidos en úno:* la introducción de tal palabra nos libra de emplear las largas frases: *destruyendo el rebatimiento; supongamos destruido el rebatimiento;* &ª, &ª

lelas á la primera que se levantó por $a_0$, y se hallarán en el plano perpendicular á la LT; y como por el enhiestamiento de los planos de proyección no se cambia la dirección de éste, dichas perpendiculares, que lo son ya al horizontal y vertical, giran permaniendo en el plano perpendicular á la LT; luego cortándose, y en ángulo recto, los planos de preyección, se cortarán de la misma manera tales perpendiculares; y *resulta de la intersección de ellas un punto en el espacio;* así que la figura 5 se ha transformado en el dibujo que existe en el diedro primero de la figura 4. De modo que, siendo a, a′ los pies de las perpendiculares que se cortan ó pasan por dicho punto, *serán por eso las proyecciones de éste* [nº 18].

L. Q. D. D.

## COROLARIOS

1º Luego es cierto lo que dijimos antes [nº 19], es á saber; *si en cada úno de los planos de proyección se da un punto, para que exista ótro en el espacio, del cual puedan ser aquéllos considerados como proyecciones,* **las líneas proyectantes ó perpendiculares á los planos de proyección, que pasan por dichos puntos, deben hallarse en un mismo plano.**

2º Luego *no pueden considerarse en descriptiva dos puntos como proyecciones de ótro del espacio,* **sino cuando determinan una línea perpendicular á la de tierra.** Porque sólo entonces las perpendiculares á los planos de proyección, pasando por esos dos puntos se cortan en el espacio en virtud del enhiestamiento, dado que esas líneas se hallen en un mismo plano perpendicular á la de tierra.

*Observación importante.*—De lo expuesto se infiere, que con el enhiestamiento de los planos de proyección reaparecen los puntos y figuras del espacio (nº 28, Observ. 2ª); luego para encontrar la verdadera posición de un punto de éste dadas las proyecciones, ejecútese el enhiestamiento: entonces las perpendiculares trazadas por las proyecciones á los planos de proyección, ó las líneas proyectantes del punto, indicarán por su encuentro ó intersección, el lugar del punto.

*(Continuará)*