
TRATADO

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

POR EL MISMO PROFESOR

Continuación de la página 237, número 116

Aun sin el enhiestamiento se puede conocer la posición de un punto dadas sus proyecciones; porque, siendo éstas a , a' , por ejemplo (fig. 5), el punto, respecto del plano horizontal, se hallará en la proyectante ó perpendicular á él levantada por a , y á una altura igual á la distancia que hay de a' á la línea de tierra (n.º 25 Consc.^a 3.^a); ó, respecto del plano vertical, en la proyectante ó perpendicular á éste levantada por a' , y á una distancia igual á la que existe de la proyección horizontal á la línea de tierra (Id., Consc.^a 4.^a). Esta manera de determinar un punto del espacio constituye el método llamado *de los planos acotados*; y se dice *cota de un punto el valor numérico de la longitud de su línea proyectante*.

NOTA.—Con el fin de auxiliar la comprensión del asunto conviene comparar las proyecciones dadas en descriptiva con la posición que tengan los puntos en perspectiva: este procedimiento hace desaparecer las dificultades que, en ocasiones, ofrece la representación.

30. DISTANCIA A LA LINEA DE TIERRA.—De con-

formidad con lo dicho en el n^o 11, debemos saber inferir de las proyecciones, no sólo la posición del punto respecto de los planos de proyección, sino también la manera de determinar gráficamente la distancia del punto á la línea de tierra, distancia cuya expresión algébrica se contiene en la primera de las formas puestas en la Nota del n^o 26; y aunque tal determinación corresponde á la teoría de los giros que se estudiará después, la exponremos por su sencillez ahora, para que, desde el principio, se vea la manera como la Geometría descriptiva cumple fielmente con su objeto. A la verdad, y recordando lo dicho en la Consc.^a 5.^a de ese n^o, vemos que $A a_0$ (fig. 4) es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $A a_0 = a'a_0$ y $A a' = a_0 a'$, magnitudes que existen en descriptiva (figs. 5.^a y 6.^a): si pues, en el plano de rebatimiento pudiéramos construir con estos datos, un triángulo rectángulo, su hipotenusa representaría gráficamente la magnitud de esa distancia. Pero nada más fácil; porque haciendo centro en a_0 intersección de las líneas de tierra y correspondencia, con la distancia ó longitud $a'a_0$, como radio, describese un giro ó cuadrante de círculo hasta llegar al a' , (fig. 6.^a) de la primera línea: uniéndose entonces a con a' , será $a a'$, la magnitud pedida; pues que, inspeccionando las figuras 4.^a y 6.^a se observa que el $\Delta A a_0 a'$ de aquella es congruente con el $\Delta a' a a_0$ que se acaba de construir; por tanto $A a_0 = a a'$; luego ésta representa la distancia del punto A del espacio á la línea de tierra.

Se habría podido también hacer girar el punto a' al rededor de a_0 hasta que tocara en un punto a , de la línea de tierra, en cuyo caso $a'a$, representaría la misma distancia.

31. DIFERENTES POSICIONES DE UN PUNTO DEL ESPACIO.—Un tal punto puede tener respecto de los planos de proyección en perspectiva, las posiciones que se indican en el siguiente

CUADRO

	Nº de posiciones
<i>Generales.</i>	
Sin condición ninguna, y según que el punto se halla en el diedro 1º, 2º, 3º, 4º.....	hay 4
<i>Particulares.</i>	
En el plano bisector del diedro 1º, 2º, 3º, 4º.....	„ 4
En la parte anterior del plano horizontal.....	„ 1
„ „ „ posterior „ „ „ „.....	„ 1
„ „ „ superior „ „ „ vertical.....	„ 1
„ „ „ inferior „ „ „ „.....	„ 1
„ „ línea de tierra.....	„ 1
Total de posiciones diferentes.....	13

Nota.—En contraposición no está por demás decir, que en la Geometría analítica del espacio, las diferentes posiciones se determinan considerando simultáneamente el valor de la distancia y el sentido. Si pues, de conformidad con lo insinuado en la *Nota* del nº 25, escribimos $x = \pm p$ por la distancia de un punto al plano vertical; y $y = \pm q$ por la que tiene respecto del plano horizontal; recibiendo x, y todos los valores comprendidos entre 0 y el ∞ ; y significando los signos $+, -$ que el punto puede estar á la derecha ó izquierda del plano vertical; ó por encima ó debajo del plano horizontal; analíticamente las posiciones diversas serían

Diedros	Plano hor.	Espacio	Plano vert.	Líñ. de tie.	Nº de posiciones
En el 1º	$x=+p$ $y=+o$	$x=+p$ $y=+p$	$x=+o$ $y=+q$	$x=+o$ $y=+o$	Son. . . . 4
" " 2º	$x=-p$ $y=+o$	$x=-p$ $y=+q$	$x=-o$ $y=+q$	$x=-o$ $y=+o$	
" " 3º	$x=-p$ $y=-o$	$x=-p$ $y=-q$	$x=-o$ $y=-q$	$x=-o$ $y=-o$	" 4
" " 4º	$x=+p$ $y=-o$	$x=+p$ $y=-q$	$x=+o$ $y=-q$	$x=+o$ $y=-o$	" 4
<i>Total de posiciones diferentes. . . 16</i>					

Hay tres posiciones más que en el cuadro anterior; pero, aunque analíticamente pueda decirse que son cuatro las posiciones en la línea de tierra; y ocho, en los planos de proyección; gráficamente se reducen á una las primeras, y á cuatro las segundas, más las de los planos bisectores. Así en descriptiva las posiciones deducidas de las analítidas serán

$$N = 16 - 7 + 4 = 13.$$

como lo hemos visto.

En el último cuadro se nota igualmente, que los valores del tercer diedro, en cuanto á los signos, son opuestos á los del primero; y los del cuarto, á los del segundo.

32.—POSICION EN DESCR. PTIVA DE LAS PROYECCIONES DE UN PUNTO.—Para esto procederemos, como lo hemos dicho [nº 29. *Nota*], comparando la posición de un punto referido á los planos de proyección en perspectiva caballera, con la que tengan las proyecciones del mismo en descriptiva; y principiaremos estudiando

I Las posiciones generales. Si el punto A [fg. 7] se halla de un modo cualquiera en el espacio ó diedro principal, por lo visto en el nº 24 las proyecciones serán,

a la horizontal, formada en la parte anterior del plano de este nombre; y a' la vertical, situada en la parte superior del plano así llamado: las perpendiculares trazadas de estas proyecciones á la línea de tierra, se sabe que la cortan en el mismo punto a_0 [nº 26, Consc. 6ª]. Si se halla de la misma manera el punto B en el diedro de atrás, las proyecciones correspondientes b, b' estarán, la úna en la región posterior del plano horizontal, y la ótra en la superior del plano vertical: por igual razón las perpendiculares trazadas por estas proyecciones cortan la línea de tierra en b_0 . Situado asimismo el punto C en el diedro opuesto, las proyecciones correspondientes c, c' estarán, la úna en la parte posterior del plano horizontal; y la ótra, en la inferior del plano vertical: las perpendiculares trazadas por estas proyecciones cortan la línea de tierra en c_0 . Finalmente, el punto D, situado en el diedro de abajo, tendrá las proyecciones d, d' , la úna en la región anterior del plano horizontal; y la ótra, en la inferior del plano vertical: las perpendiculares trazadas por dichas proyecciones cortan la línea de tierra en d_0 .

Para representar ahora en descriptiva lo que respecto de dichos puntos manifiesta la figura precedente en perspectiva, tomemos sobre la L T [fig. 8], las magnitudes $L a_0, L b_0, L c_0, L d_0$ de la figura 7, de manera que desde L de aquélla resulten distancias proporcionales á las del mismo nombre de ésta; y tracemos por los puntos correspondientes perpendiculares á la L T: por lo dicho en el nº 28, y considerando el punto A, es necesario tomar desde a_0 por debajo de esta línea y en la perpendicular correspondiente, la cantidad aa_0 de la figura en perspectiva; y por encima, la $a'a_0$: serán a por debajo de la línea de tierra, y a' por encima las proyecciones del punto A.

Si se considera el punto B, como por el rebatimiento la parte posterior del plano horizontal, donde está b , se confunde ó coincide con la superior del vertical, donde se halla b' ; partes, que, así confundidas, quedan por encima de la línea de tierra; las proyecciones de B, que se hallan en esas partes, quedarán también por encima

de la misma línea y en la perpendicular á ella. Luego, tomando desde b_0 en la perpendicular correspondiente y en el mismo sentido, una vez la cantidad bb_0 , de la figura en perspectiva; y otra vez la $b'b_0$, serán b, b' situadas por encima de la línea de tierra, las proyecciones del punto B.

Si se considera el punto C, un razonamiento igual manifiesta que serán c por encima de la línea de tierra, y c' por debajo, las proyecciones del punto; y que para D, sus proyecciones son d, d' , fijadas por debajo de la misma línea.

Todo lo expuesto se resume diciendo:

1º *Si un punto se halla en el diedro principal, tendrá las proyecciones á distinto lado de la línea de tierra: la horizontal por debajo y la vertical por encima.*

2º *Si un punto se halla en el diedro de atrás, tendrá las proyecciones por encima de la línea de tierra.*

3º *Si un punto se halla en el diedro opuesto, tendrá las proyecciones á distinto lado de la línea de tierra: la horizontal por encima y la vertical por debajo.*

4ª *Si un punto se halla en el diedro de abajo, tendrá las proyecciones por debajo de la línea de tierra.*

II *Posiciones en los planos bisectores.*—Se determinan en virtud del siguiente

LEMA. *Las proyecciones de un punto situado en el plano bisector de un ángulo diedro, equidistan de la línea de tierra.*

Si es A (fig. 9) el punto del plano bisector LTD del diedro XLTY, que podemos suponerlo recto, siendo $aa_0, a'a_0$ las distancias del punto á la línea de tierra, debe ser

$$aa_0 = a'a_0$$

DEMOS. Por ser $\sphericalangle Aa_0a = Aa_0a'$, y $\sphericalangle a = R = a'$, el plano Aa_0 de las proyectantes Aa, Aa' queda dividido por el plano bisector en dos triángulos congruentes; pues que la hipotenusa Aa_0 es común á los dos. Luego

$$Aa = Aa' \text{ y } aa^0 = a'a_c.$$

L. Q. D. D.

COROL. Si, como lo hemos dicho, es recto el diedro, *el plano de las proyectantes del punto es un cuadrado*: entonces

$$Aa = aa_o = a_o a' = Aa'$$

Esto supuesto, lo dicho para los puntos A, B, C, D, en los cuatro casos de las *posiciones generales*, vale también ahora; sólo que, cuando estos puntos se hallan en los planos bisectores respectivos, se sabe, por el *Lema* demostrado, que equidistan las proyecciones de la línea de tierra en cada uno de los diedros; ó es respectivamente

$$aa_o = a' a_o, bb_o = b' b_o, cc_o = c' c_o, dd_o = d' d_o;$$

por tanto, representando en descriptiva las proyecciones: respecto del punto A del diedro primero, se hallarán equidistantes de la línea de tierra: *a* por debajo y *a'* por encima; lo mismo respecto del punto C del diedro tercero, sólo que estará *c* por encima y *c'* por debajo de la línea de tierra. El punto B del diedro segundo, tendrá las proyecciones *b*, *b'*, confundidas en una ó coincidiendo por encima de dicha línea; y el punto D del diedro cuarto, las *d*, *d'* confundidas en una ó coincidiendo por debajo de la misma línea.

En otros términos:

1º *Si el punto se halla en el plano bisector del diedro principal ú opuesto* tendrá las proyecciones á igual distancia á uno y otro lado de la línea de tierra: por debajo la horizontal y por encima la vertical en el primer caso; pero de una manera contraria en el segundo.

2º *Si el punto se halla en el plano bisector del diedro de atrás ó de abajo*, tendrá las proyecciones confundidas en un punto ó coincidiendo por el mismo lado de la línea de tierra: por encima en el primer caso; y por debajo en el segundo.

NOTA. De conformidad con lo indicado en el nº 31 respecto del signo de las proyectantes de un punto, por lo que se manifiesta en el 2º cuadro; se nota que en descriptiva hay esa contrariedad también en las posiciones:

las del diedro principal son opuestas ó contrarias á las del diedro tercero ú opuesto, y viceversa: como las del diedro de atrás, á las del de abajo; y viceversa.

III POSICIONES EN LOS PLANOS DE PROYECCION.—

Si el punto se encuentra en uno de los planos de proyección, como el E de la figura 10, en la parte anterior del plano horizontal, el F en la superior del plano vertical, el G en la parte posterior de aquél y el H en la inferior de éste; por no distar nada el punto del plano donde se halla, el mismo será su proyección de igual nombre en este plano; y como la separación de un punto de uno de los planos de proyección se mide por la distancia de la proyección de nombre contrario á la línea de tierra (n.º 26, Consec. 3.º y 4.º), tal proyección se hallará en esta línea; por lo que resulta considerado el rebatimiento de los planos:

1.º *Si un punto se halla en el plano horizontal de proyección, la proyección de nombre contrario estará en la línea de tierra; y la de nombre igual, por debajo ó encima de esta línea, según que el punto del espacio se encuentre en la parte anterior ó posterior del mismo plano.*

2.º *Si un punto se halla en el plano vertical de proyección, la proyección de nombre contrario estará en la línea de tierra; y la de nombre igual, por encima ó debajo de esta línea, según que el punto del espacio se encuentre en la parte superior ó inferior del mismo plano.*

(Continuará)