TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

Continuación de la página 312, número 123

Caso 2º—Sea ω un número fraccionario: como creciente que lo es, será un quebrado impropio, y estará así entre dos números enteros consecutivos cualesquiera, á saber, m y $m+1$, siendo, como la magnitud ω, m un valor capaz de aumento indefinido: se sigue de lo expuesto

$$m < \omega < m+1,$$

ó
$$\frac{1}{m} > \frac{1}{\omega} > \frac{1}{m+1},$$

ó
$$1+\frac{1}{m} > 1+\frac{1}{\omega} > 1+\frac{1}{m+1};$$
por lo cual

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}.$$

Pero por el caso 1º se verifica

$$\text{lím.}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}\right] = \text{lím.}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} . \left(1+\frac{1}{m}\right)\right] =$$

$$\text{lím.}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e,$$

una vez que $\text{lím.}\left(1+\frac{1}{m}\right)=1$, porque $\text{lím.}\frac{1}{m}=0$. Es también.

$$\text{lím.}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} = \text{lím}\ \left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right]^{m+1} : \left(1+\frac{1}{m+1}\right)\right.$$

$$= \text{lím.}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} = e.$$

Luego se verificará, por el *lema* anterior [nº 41],

$$\text{lím.}\left[1+\frac{1}{\omega}\right]^{\omega} = \text{lím.}\left[1+\frac{1}{m}\right]^{m+1} = \text{lím.}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} = e.$$

Q. D. L. 2º

Caso 3º—Si ω es negativo, pongamos el signo de manifiesto, y sea

$$\omega=-(m+1),$$

tendremos

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=\left[1+\frac{1}{-(m+1)}\right]^{-[m+1]}=\frac{1}{\left[1+\frac{1}{-(m+1)}\right]^{m+1}}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}=\frac{1}{\left[\frac{m}{m+1}\right]^{m+1}}=\left[\frac{m+1}{m}\right]^{m+1}$$

$$=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.\left(1+\frac{1}{m}\right);$$

luego

$$\text{lím.}\left[1+\frac{1}{\omega}\right]^{\omega}=\text{lím.}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]$$

$$=\text{lím.}\left[1+\frac{1}{m}\right]^{m}=e\ [\text{Caso 1º}],$$

por ser $$\text{lím.}\left[1+\frac{1}{m}\right]=1.$$

Luego el teorema puesto vale para todos los valores posibles de ω.

COROLARIOS

1º—Si en la expresión $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$, se pone $\omega=\frac{1}{\delta}$, tendremos

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=\left[1+\frac{1}{\frac{1}{\delta}}\right)^{\frac{1}{\delta}}=[1+\delta]^{\frac{1}{\delta}};$$

por tanto

$$\text{lím.}[1+\delta]^{\frac{1}{\delta}}=e. \qquad [6]$$

2º— $$\text{lím.}[1+x\delta]^{\frac{1}{\delta}}=e^{x}. \qquad [7]$$

Pues

$$[1+x\delta]^{\frac{1}{\delta}}=[1+x\delta]^{\frac{1}{x\delta}\cdot x};$$

y, según el *corol.* anterior,

$$\text{lím.}\left[(1+x\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]=\left\{\text{lím.}\left[(1+x\delta)^{\frac{1}{x\delta}}\right]\right\}^{x}=e^{x}.$$

Si $\delta=\frac{1}{\omega}$ ú $\omega=\frac{1}{\delta}$, tendremos

$$[1+x\delta]^{\frac{1}{\delta}}=\left[1+\frac{x}{\omega}\right]^{\omega};$$

y así

$$\text{lím.}\left[1+\frac{x}{\omega}\right]^{\omega}=e^{x}.$$

3º—Debe ser

$$\text{lím.}\left(\frac{\log.[1+\delta]}{\delta}\right)=\log.e. \qquad [8]$$

Pues

$$\frac{\log.[1+\delta]}{\delta}=\frac{1}{\delta}.\ \log.[1+\delta]=\log.[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}];$$

y se sigue, que

$$\text{lím.}\frac{\log.[1+\delta]}{\delta}=\text{lím.}[\log.(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]$$

$$=\log.[\text{lím.}(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]$$

$$=\log.e.$$

Si es *e* la base del sistema, resulta

$$\text{lím.}\frac{\log.[1+\delta]}{\delta}=1,$$

ó mejor

$$\text{lím.}\frac{l[1+\delta]}{\delta}=l.e=1$$

4º—Para

$$\frac{a^{\delta}-1}{\delta},$$

póngase

$$a^{\delta}-1=\nu,\ \text{de donde}\ a^{\delta}=1+\nu,$$

por tanto

$$\delta={}^{a}\log.[1+\nu]:$$

resultará así

$$\frac{a^{\delta}-1}{\delta}=\frac{\nu}{{}^{a}\log.(1+\nu)}=\frac{1}{\frac{{}^{a}\log.(1+\nu)}{\nu}};$$

y, según el *corol.* 3.º,

$$\text{lím.}\frac{a^{\delta}-1}{\delta}=\text{lím.}\frac{1}{\frac{{}^{a}\log.(1+\nu)}{\nu}}=\frac{1}{{}^{a}\log.e}; \qquad [g]$$

y, como de la identidad

$$a=e^{z}, \qquad (h)$$

sale, en el sistema cuya base *a*,

$$\log.\ a=1=z\times{}^{a}\log.e,\ \text{ó}\ z=\frac{1}{{}^{a}\log.e}; \qquad (i)$$

se saca, además, de (h) en el sistema neperiano,

$$\text{l.a}=z.\text{l.e}=z \qquad (j)$$

y de (i) y (j)

$$\frac{1}{{}^{a}\log.e}=\text{l.a}:$$

se sigue, que se trasforma (g) en

$$\text{lím.}\frac{a^{\delta}-1}{\delta}=\frac{1}{{}^{a}\log.e}=\text{l.a} \qquad (9)$$

De otro modo: la identidad en el sistema neperiano

$$a=e.^{\text{l.a}},$$

da en el sistema cuya base es *a*,

$$\log.a = 1 = l.a.\ {}^{a}\log.e;$$

de donde

$$\frac{1}{{}^{a}\log.e} = l.a;$$

este valor sustituído en [g] produce también la ecuación [9].

5º—Para

$$\frac{(1+\delta)^{m}-1}{\delta},$$

escríbase

$$[1+\delta]^{m} = a^{\nu},\ \text{ó}\ \nu = m \times {}^{a}\log.(1+\delta);$$

por tanto

$$\frac{[1+\delta]^{m}-1}{\delta} = \frac{a^{\nu}-1}{\delta} = \frac{a^{\nu}-1}{\nu}.\frac{\nu}{\delta} = \frac{a^{\nu}-1}{\nu} \times \frac{m.{}^{a}\log.[1+\delta]}{\delta};$$

y, según los *corol.* 3º y 4º,

$$\text{lím.}\frac{[1+\delta]^{m}-1}{\delta} = \text{lím.}\frac{a^{\nu}-1}{\nu} \times \text{lím.}\ \frac{m \times {}^{a}\log.[1+\delta]}{\delta}$$

$$= m \times \text{lím.}\frac{a^{\nu}-1}{\nu} \times \text{lím.}\frac{{}^{a}\log.[1+\delta]}{\delta}$$

$$= m \times l.a \times {}^{a}\log.e = m\frac{1}{{}^{a}\log.e}.{}^{a}\log.e = m. \qquad [10]$$

VI

LIMITES DE ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

43. Relaciones de un arco con su seno y tangente.—Se sabe que en todo arco menor que $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, *la línea seno es menor que el arco, y éste menor que la línea tangente.* Si esta aserción no fuera manifiesta, sea [fg. 8], arc. $BE < 90^\circ$; hágase $\sphericalangle \iota = \alpha'$, y trácese la cuerda EE′, como la tangente LL′: resulta

$$\text{cuer. } EE' < \text{arc.} EBE' = \text{arc.} 2\delta,$$

ó
$$\tfrac{1}{2} EE' < \tfrac{1}{2} \text{arc.} EBE', \text{ ó } ED < \text{arc.}\delta. \qquad (a)$$

Ahora pues, $\text{sect.} EBE'O < \triangle LL'O;$

y así
$$\tfrac{1}{2} \text{arc.} 2\delta \times OB < \tfrac{1}{2} LL' \times OB,$$

ó
$$\text{arc.} 2\delta < LL',$$

ó
$$\text{arc.}\delta < LB; \qquad (b)$$

y se sigue de (a) y (b)

$$ED < \text{arc.}\delta < LB. \qquad (c)$$

L. Q. D. D.

44. Límite del seno.—Se infiere de la expresión *(c)*, al dividir por $r = OB$,

$$\text{sen.}\delta < \frac{\text{arc.}\,\delta}{r} < \text{tg.}\delta$$

y, como $r = 206\ 264''\cdot 8$, si escribimos $\delta = \frac{\text{arc.}\delta}{206\ 264''\cdot 8}$, nº abstracto, resulta

$$\text{sen.}\delta < \delta < \text{tg.}\delta; \qquad (d)$$

por lo cual

$$\frac{1}{\text{sen.}\delta} > \frac{1}{\delta} > \frac{1}{\text{tg.}\delta} = \frac{\cos\delta}{\text{sen}\,\delta},$$

ó

$$1 > \frac{\text{sen}\delta}{\delta} > \cos\delta, \qquad (e)$$

ecuación que se verifica siempre, por pequeño que sea $\sphericalangle\delta$: luego también se verificará en el límite; y, como es en este caso

$$\text{lím.}\cos\delta = 1;$$

por el *lema* del nº 41, será

$$\text{lím.}\frac{\text{sen}\delta}{\delta} = 1. \qquad (11)$$

Corol. Luego se tiene antes del límite [nº 35, lema],

$$\frac{\text{sen}\delta}{\delta} = 1 + \varepsilon, \text{ ó } \text{sen}\delta = \delta + \varepsilon\delta,$$

ó

$$\text{lím.sen}\delta = \delta = \frac{\text{arc.}\delta}{206\ 264''\cdot 8}: \qquad (12)$$

ya se sabe que

$$\text{lím.}\varepsilon\delta = 0.$$

45. Límite de la tangente.—Se sigue también de (e),

$$\frac{1}{\cos\delta} > \frac{\text{tang.}\delta}{\delta} > 1;$$

y como

$$\text{lím.}\frac{1}{\cos\delta} = 1;$$

resulta

$$\text{lím.}\frac{\text{tg.}\delta}{\delta} = 1. \qquad (13)$$

Corol.—Antes del límite se infiere que

$$\frac{\text{tg.}\delta}{\delta} = 1 + \varepsilon, \text{ ó } \text{tg.}\delta = \delta + \varepsilon\delta;$$

y así

$$\text{lím.tg.}\delta = \delta = \frac{\text{arc.}\delta}{206\ 264''\cdot 8} \qquad (13)$$

pues

$$\text{lím.}\varepsilon.\delta = 0.$$

Observación.—De las ecuaciones *(12)* y *(13)* es manifiesto, que

$$\text{lím.sen}\delta = \text{lím.tg.}\delta = \delta = \frac{\text{arc.}\delta''}{206\ 264''\cdot 8};$$

esto es: *en el límite, ó cuando se consideran arcos muy pequeños, el seno y la tangente trigonométricos son iguales al arco;* luego en los cálculos puede ponerse éste por aquéllos y viceversa. Y se comprende por lo dicho antes, que debe escribirse en estos casos

$$\delta = \frac{\text{arc.}\delta''}{206\ 264''\cdot 8}(\textit{núm. abstr.}),$$

relación para la cual, *arc.δ* debe expresarse en segundos: así será

$$\delta = \text{arc.}\delta'' \times \frac{1}{206\,264''\cdot 8},$$

luego, si arc.$\delta = 1''$, resulta que

$$\text{lím.sen.}\,1'' = \text{lím.tg.}\,1'' = 1'' \times \frac{1}{206\,264''\cdot 8} = 0\cdot 000\,004\,8;$$

y esto significa, *que el valor recíproco de* 206 264·8, *número de segundos contenidos en un arco de una longitud igual al radio, es el seno y la tangente de* 1″.

46. Ejemplos de aplicación.—Nos proponemos ahora resolver las tres cuestiones siguientes, aplicando los principios estudiados en lo que precede:

1ª Es importantísima y muy práctica la que tiene por objeto *determinar el valor de la unidad de superficie de un fundo rústico, cuyo producto bruto es* p; *y* g, *los gastos de la producción anual, como son los expendidos en las labores de la tierra, rejas, embasurado ó majadeado, simiente, riegos, escardas, siega, recolección, transporte al lugar del consumo, &ª., &ª.:* contiene además, g los réditos de las cantidades sucesivamente gastadas hasta la venta del producto; y es

$$m = 1 + \frac{r}{100} = 1 + r' \qquad [f]$$

el monto ó sea la suma de la unidad monetaria *(un sucre* en la República del Ecuador*)*, aumentada de sus intereses al $r\,\%$ ó r' por 1 al año *(*[1]*)*,

(1) En el Ecuador es r el 6 % ó 0·06 por 1; pues dice el Cógido Civil:

Si llamamos v el importe desconocido de la unidad superficial, una *hertárea* por ejemplo; decimos que tendrá por valor la expresión

$$v=\frac{p-g}{m-1}=\frac{p-g}{r'}.$$

Demos^n. Porque sea p' el producto neto ó líquido, anual de la unidad de superficie, y que, respecto del capital tierra, se lo llama también *renta*: su expresión será

$$p'=p-g; \qquad (g)$$

esto es, la diferencia entre el producto íntegro ó bruto y los gastos anuales de producción: g debe pues, contener, como ya se ha dicho, todo lo gastado y la utilidad que con lo gastado se obtuviera, es á saber: *el rédito de lo gastado en la producción.*

Ahora bien, como un fundo (el terreno en sí mismo) subsiste indefinidamente; pues que es, por excelencia, el *capital fijo, permanente,* así llamado por los economistas, el valor v' invertido una vez en la adquisición de una unidad superficial, al cabo de un número ω de años indefinidamente creciente, se convertirá en

$$v'(1+r')^{\omega}: \qquad [h]$$

si pues, tal unidad de superficie da la renta anual p', los productos sucesivos en los ω años corridos, se expresarán absolutamente por

$$p'[1+r']^{\omega-1}, p'[1+r']^{\omega-2}, \ldots, p'(1+r')^2, p'[1+r'],$$

"Art. 2 194. Si se estipulan en general intereses, sin determinar la cuota, se entenderán los intereses legales.

Interés legal es el de *seis por ciento al año.*

Será el mismo interés ó rédito por el precio que haya dejado de pagarse por los *fundos*, ó cnando, debiendo entregarse un *fundo*, se hubiere retenino indebidamente."

$$p'[1+r']^{0}=p';$$

y como que la utilidad de la producción requiere sea la suma de estos productos ó rentas igual al capital invertido al principio en la adquisición del terreno, aumentado de los intereses que respectivamente se devenguen durante el mismo tiempo, valor total que lo designa la forma (h); tiene de verificarse

$$v'[1+r']^{\omega}=p'[1+r']^{\omega-1}+p'[1+r']^{\omega-2}+\dots$$

$$+p'[1+r']^{2}+p'[1+r']+p',$$

ó $$v'=\frac{p'}{1+r'}+\frac{p'}{[1+r']^{2}}+\dots+\frac{p'}{(1+r')^{\omega-2}}+\frac{p'}{(1+r')^{\omega-1}}$$

$$+\frac{p'}{[1+r']^{\omega}}$$

$$=\frac{\dfrac{p'}{[1+r']^{\omega+1}}-\dfrac{p'}{1+r'}}{\dfrac{1}{1+r'}-1}=\frac{p'-\dfrac{p'}{(1+r')^{\omega}}}{r'},$$

ecuación verdadera para todos los estados de las cantidades en ella contenidas; y así que

[i] $$\lim. v'=\lim.\frac{p'-\dfrac{p'}{[1+r']^{\omega}}}{r'}=\frac{p'}{r'},$$

una vez que, por lo dicho y según el teor. III del nº 37, resulta que

$$\text{lím.}\frac{p'}{(1+r')^{\omega}}=\frac{p'}{(1+r')^{\infty}}=\frac{p'}{\infty}=0.$$

Si pues, escribimos lím.$v'=v$; y se ponen en (i) por p', r' sus respectivos valores, de conformidad con (g), (f) se tiene, finalmente,

$$v=\frac{p'}{r'}=\frac{p-g}{m-1}.$$

L. Q. D. D.

(Continuará)