
TRATADO

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

POR EL MISMO PROFESOR



Continuación de la página 324, número 123

a): si está fuera de tales planos, las proyecciones *a*, *a'* del punto aludido, distarán desigualmente de la línea de tierra; y las dos posiciones que corresponden á la recta, se manifiestan en los dibujos 1º y 2º de la figura 30, según que el segmento definido por las trazas ó intersección con la línea de tierra y el punto mencionado, se halle en el diedro primero, pasando la recta al tercero; ó en el segundo, pasando al cuarto; ó viceversa: las proyecciones de tal punto, distando desigualmente de la línea de tierra, se hallan, como las proyecciones de la recta que forman una sola perpendicular á dicha línea, á distinto lado de la misma: por debajo la horizontal y por encima la vertical ó al revés, en aquél; y al mismo lado, por encima ó debajo de esa línea en éste.

b): si está en el plano bisector de los diedros respectivamente opuestos. Entonces resultará también, que las proyecciones del punto en la recta elegido, equidistan de

la línea de tierra. Pues que, en virtud del *Lema* demostrado en el n.º 32, II, las proyecciones de tal punto, por estar, como en la recta, en el plano bisector, *equidistan de esa línea*.

Como en todo lo demás se verifica lo dicho en el caso *a*) precedente, resulta que, en descriptiva, los dibujos 1.º y 2.º de la figura 31, se refieren á la recta, según que el segmento definido por las trazas $h-h'$, $v-v'$ y el punto $a-a'$ en la recta considerado, se encuentre en el diedro primero, pasando dicha recta al tercero; ó en el segundo, pasando al cuarto; ó viceversa: *las proyecciones de tal punto, distando igualmente de la línea de tierra, se hallan, como las proyecciones de la recta que forman una sola perpendicular á dicha línea, á distinto lado de la misma: por debajo la horizontal y por encima la vertical, ó al revés, en aquél; y al mismo lado, por encima ó debajo de esa línea, respectivamente confundidas en una las proyecciones del punto y de la recta, en éste.*

47. CASO INVERSO.—En el n.º anterior, dadas en perspectiva caballera las posiciones de la recta del espacio, se han encontrado las de sus proyecciones en descriptiva ó referidas á la línea de tierra después del rebatimiento: *trátase ahora del problema inverso, es á saber: dadas las proyecciones en descriptiva, determinar las posiciones correspondientes de la recta del espacio en perspectiva caballera, ó sea referida á los plano de proyección, lo que haremos en el orden siguiente:*

I Posiciones oblicuas á la línea de tierra, sin cortarla.—*a*) (fig. 16, dib. 1.º) En virtud del enhiestamiento (n.º 29) sube, como se sabe, la parte inferior ó visible del plano horizontal, hasta formar un diedro igual á un recto con la fija y visible del plano vertical; luego, con esa parte del plano horizontal, subiendo todo lo que está en ella, como la proyección hv , queda delante del plano vertical; por lo que el plano proyectante correspondiente queda también delante de este plano, formando con él un diedro oblicuo. Mas, como subsisten, con el plano vertical, fijos la proyección $h'v'$ y el proyectante respectivo que es oblicuo al horizontal, proyección y proyectante que se hallan por encima de la línea de tierra, el primer proyectante corta

el segundo por delante del plano vertical pero encima del horizontal, región que no es otra cosa que el diedro primero, *con lo que resulta en el espacio una línea situada en el diedro primero ó principal, y oblicua á entrambos planos de proyección, sin cortar la de tierra.*

Nota.—La recta se extiende en el espacio del diedro primero, del punto h , ó si se quiere el H situado en la región anterior del plano horizontal (véase la figura 15, I), al punto v' , ó mejor dicho el V, de la superior del plano vertical; de manera que el razonamiento precedente se refiere al segmento visible HV de la recta, ó sea al determinado por las trazas de la misma.

b) (Fig. 16, dib. 2^o) En virtud del enhiestamiento indicado, baja la parte posterior ó invisible del plano horizontal, hasta formar un diedro igual á un recto con la fija y visible del plano vertical, pero por detrás de éste: queda de esa manera por detrás del mismo la proyección hv con el proyectante respectivo, formando éste y el vertical un diedro cualquiera ú oblicuo; y como que dicho proyectante corta por encima del horizontal y por detrás del vertical el proyectante respecto de la proyección del mismo nombre, proyectante que forma con el horizontal un diedro oblicuo, *resulta en el espacio una línea situada en el diedro segundo ó de atrás, y oblicua á entrambos planos de proyección, sin cortar la de tierra.*

Nota. La recta se extiende en el espacio del diedro de atrás, del punto h , ó si se quiere el H de la región posterior del plano horizontal, al punto v' , ó mejor dicho el V de la superior del plano vertical; por lo que es invisible el segmento HV que así resulta; pues que se halla por detrás del plano vertical.

c) (Fig. 16, dib. 3^o) Se comprende en virtud de un raciocinio semejante, que, después del enhiestamiento, quedan por detrás del plano vertical la proyección hv y el proyectante respectivo, formando éste un diedro oblicuo con el vertical de proyección; y como que la proyección $h'v'$ con el proyectante correspondiente, oblicuo al horizontal, quedan por debajo de éste; los dos proyectantes se cortan en el diedro tercero ú opuesto. Luego *resulta en el espacio una línea situada en el diedro tercero ú*

opuesto, y oblicua á los planos de proyección, sin cortar la de tierra.

Nota. La recta se extiende en el espacio del diedro opuesto, del punto H, situado en la región posterior del plano horizontal, al v' ó V, que se halla en la inferior del plano vertical; por lo que es invisible, no sólo el segmento HV, sino toda la recta, á diferencia del caso precedente, donde la línea considerada es visible en la parte del segmento VN.

d) (Fig. 16, dib. 4^o) Por iguales razones se comprende, que, después del enhiestamiento, quedan por delante del vertical de proyección la hv y el proyectante respectivo, formando éste un diedro oblicuo con aquél; y como que la proyección vertical $h'v'$ y el proyectante correspondiente, oblicuo al horizontal, quedan por debajo de éste, los dos proyectantes se cortan en el diedro cuarto ó de abajo. Luego, *resulta en el espacio una línea situada en el diedro cuarto ó de abajo, y oblicua á los planos de proyección, sin cortar la de tierra.*

Nota. La recta se extiende en el espacio del diedro cuarto, del punto H, situado en la región anterior del plano horizontal, al V que se halla en la inferior del vertical; por lo que es invisible el segmento HV; pues que se halla por debajo del plano horizontal correspondiente al diedro primero.

II Posiciones oblicuas cortando la línea de tierra. Como en este caso las proyecciones pueden formar ángulos desiguales ó ángulos iguales con dicha línea, el caso actual lo dividiremos en los siguientes:

A): ANGULOS DESIGUALES. Las proyecciones pueden estar á distinto lado de la línea de tierra; ó al mismo lado.

a) *Posiciones á distinto lado* (fig. 17, dib. 1^o) Por lo dicho en la sección precedente [*a*), *c*)], siendo unas mismas las proyecciones que se cruzan cortando la línea de tierra en el mismo punto, son unos mismos los planos proyectantes que, supuesto el enhiestamiento, se cortan, ó por delante del vertical de proyección y encima del horizontal, lo que no se verifica sino en el diedro primero; ó por detrás del vertical y debajo del horizontal, lo que

sólo acontece en el diedro tercero; luego es una misma la línea resultante dirigida de aquel diedro á éste, ó viceversa. Pero como las proyecciones tienen un punto común en la línea de tierra, los planos proyectantes que por ellas pasan, tendrán común ese mismo punto; y por ser los puntos comunes de estos planos, su intersección ó la línea del espacio, ese punto pertenecerá á esta línea. Luego *resulta en el espacio una recta dirigida del diedro principal al opuesto, ó viceversa, cortando la línea de tierra.*

Nota. La recta se forma de dos segmentos, el úno visible desde la línea de tierra en el diedro principal; y el ótro invisible desde la misma línea en el opuesto.

b) Posiciones al mismo lado (fig. 17, dib. 2º) Por lo dicho en en la sección indicada [*b*), *d*)], siendo unas mismas las proyecciones que se cruzan cortando la línea de tierra en el mismo punto, son unos mismos los planos proyectantes que, supuesto el enhiestamiento, se cortan, ó por detrás del vertical de proyección y encima del horizontal, lo que no se verifica sino en el diedro segundo; ó por delante del vertical y debajo del horizontal, lo que sólo acontece en el diedro cuarto; luego es una misma la línea resultante dirigida de aquel diedro á éste, ó viceversa. Mas como se verifica lo dicho en el razonamiento precedente acerca del punto común que tienen los planos proyectantes en la línea de tierra, se infiere, que *resulta en el espacio una recta dirigida del diedro de atrás al de abajo, ó viceversa, cortando la línea de tierra.*

Nota. Se infiere que la recta es totalmente invisible.

B): ANGULOS IGUALES. Las proyecciones, como antes, pueden hallarse á distinto lado de la línea de tierra, ó al mismo lado.

a) Posiciones á distinto lado (fig. 19, dib. 1º) Vale todo lo dicho en la sección I precedente y los razonamientos anteriores, con la circunstancia que, siendo iguales, por el supuesto, los ángulos formados por las proyecciones y la línea de tierra á úno y otro lado del punto donde la cortan, son iguales las distancias á la misma, de los puntos respectivos determinados por las líneas de

correspondencia; distancias que, como se sabe (nº 26, Consecuencias 3.^a y 4.^a), son idénticas á las que hay de los puntos correspondientes de la recta á los planos de proyección; luego tales puntos equidistan de estos planos, ó se halla la recta en el bisector del diedro respectivo, pasando por un punto de la línea de tierra, á saber, el que es común á los planos proyectantes; y como sólo se verifica la posición de las proyecciones á uno y otro lado de la línea de tierra en los diedros primero y tercero; se infiere, que *resulta en el espacio una recta que, cortando la línea de tierra, se halla situada en el plano bisector de los diedros principal y opuesto.*

b) *Posiciones coincidiendo al mismo lado* (fig. 19, dib. 2º) En virtud de los mismos razonamientos, considerando las proyecciones se descubre, que *resulta en el espacio una recta que, cortando la línea de tierra, se halla situada en el plano bisector de los diedros de atrás y de abajo.*

III. Una de las proyecciones sea paralela á la línea de tierra y oblicua la ótra. Razonaremos entonces de esta manera: verificado el enhiestamiento, dirijase por un punto de la proyección paralela una perpendicular á ella y la línea de tierra; y por cada uno de los puntos donde dicha perpendicular corta las dos, otras dos perpendiculares al plano del mismo nombre de esa proyección, perpendiculares que serán, por lo mismo, paralelas entre sí: úna de las dos estará en el espacio; y la ótra, en el plano de proyección de nombre contrario (teor. cit. en el nº 33, V): entonces la línea de tierra y la proyección paralela determinan, con las perpendiculares correspondientes, dos planos, de modo que las dos rectas que se cortan en el úno, son respectivamente paralelas á las dos que se cortan en el ótro; luego tales planos serán paralelos entre sí; pues se sabe, que “Dos planos son paralelos si dos líneas que se cortan, situadas en el úno, son respectivamente paralelas á otros dos que también se cortan, situadas en el ótro.” Ahora bien, tales planos, en el caso actual, son el proyectante respecto de la proyección paralela y el plano de proyección de nombre contrario, planos que á su vez están cortados por el proyectante que define la proyección oblicua, luego, las interseccio-

nes serán paralelas; y estas intersecciones son la recta del espacio y la misma proyección oblicua; por lo que la recta del espacio será paralela al plano del mismo nombre de esa proyección; pues que "Una recta fuera de un plano, paralela á otra situada en el mismo, es paralela á este plano." Mas, como la proyección oblicua y el plano donde se halla son de nombre contrario á la proyección paralela, se infiere, que *si es una de las proyecciones paralela á la línea de tierra, resulta en el espacio una recta paralela al plano de proyección de nombre contrario.*

Por tanto, si la proyección paralela á la línea de tierra es la vertical $a'b'$, la recta AB del espacio será paralela al plano horizontal; y, según que $a'b'$ esté encima de esa línea, en ella ó debajo, se hallará AB en el diedro primero ó de atrás, en el plano horizontal ó en el diedro cuarto ú opuesto; mas, si lo es la horizontal la paralela, estará la recta en el diedro primero ó en el cuarto, en el plano vertical ó en el diedro de atrás ó en el opuesto.

IV. *Ambas proyecciones son paralelas á la línea de tierra.* Verificado el enhiestamiento, los planos proyectantes determinados por las proyecciones horizontal y vertical, serán respectivamente paralelos á la línea de tierra; pues que "Una recta fuera de un plano, paralela á otra situada en el mismo, es paralela á este plano." Pero como se sabe, que "Una recta paralela á dos planos secantes, lo es á la intersección", la recta del espacio, intersección de los dos planos proyectantes, será paralela á la línea de tierra; ó en otros términos: *si las dos proyecciones son paralelas á la línea de tierra, lo será también á ésta la recta del espacio; y, por lo mismo, paralela á un tiempo á los planos de proyección.*

Como las proyecciones pueden ser paralelas á la línea de tierra sin condición ninguna, como en el caso de la figura 22; ó equidistando de ella, como en el de la 23; ó estando, finalmente, confundida con dicha línea una de las proyecciones, como en el de la 24: la recta se hallará, respectivamente, ó en el espacio de uno de los cuatro diedros, ó en los planos bisectores de los mismos, ó en el plano de proyección de nombre contrario.

V. *Proyecciones confundidas en la línea de tierra.* En este

caso la recta no puede distar de ninguno de los planos de proyección (nº 26, Consecuencias 3.^a y 4.^a); y así que *resulte en el espacio una recta que se hallará al mismo tiempo en ambos planos, ó sea en la línea de tierra,*

VI. La una proyección es perpendicular á la línea de tierra; y la ótra un punto. Por el pie, en la línea de tierra, de la proyección perpendicular, diríjase en el espacio una recta perpendicular á dicha línea, por lo que el plano definido por las dos perpendiculares, la proyección y la construída, será perpendicular á la misma línea; y así que tal plano sea el proyectante de la recta respecto del plano de proyección donde esta situada la proyección perpendicular. Ahora bien, verificado el enhiestamiento dicho plano proyectante será también perpendicular al otro de proyección; y, para que exista un punto ó recta del espacio, tiene de pasar ese plano por la otra proyección que es, por el supuesto, un punto (nº 29, Corol. 1.^o); por tanto, como este punto determina una recta perpendicular al plano de proyección donde él está, la recta debe hallarse un el plano proyectante indicado (nº 33, V); pero á solo esta recta corresponden la proyección perpendicular y el punto proyección; luego, *si es úna de las proyecciones una línea perpendicular á la de tierra, y la ótra, un punto, resulta en el espacio una recta perpendicular al plano de proyección donde está el punto.*

ÁREA HISTÓRICA

DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

(Continuará).