TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

Continuación de la página 406, número 124

2º Es sabido que se llama "*prisma*, en la óptica, un cuerpo transparente y, por lo general, sólido, limitado, de ordinario, por tres caras planas que se cortan dos á dos." El ángulo diedro de dos ciertas caras se lo denomina el *ángulo de refringencia;* el determinado por las prolongaciones de los rayos incidente y emergente, el *ángulo de desviación*; y la cara opuesta al primero, la *base del prisma.* Si es n el índice de refracción, los ángulos de incidencia i y de refracción r respecto de la úna de las caras laterales, dan la relación

$$\text{sen.}i = n \times \text{sen.}r; \qquad (j)$$

en la ótra, el rayo emergente y la dirección interior del incidente, la

$$\text{sen.}i' = n \times \text{sen.}r'; \qquad (k)$$

los ángulos de esta dirección con las perpendiculares respectivas á las dos caras, la

$$\sphericalangle r + r' = \text{R}, \qquad [l]$$

siendo $\sphericalangle$ R el de refringencia del prisma; y los rayos incidente y emergente, la

$$\sphericalangle i + i' = \text{R} + \text{D}, \qquad [m]$$

siendo $\sphericalangle$ D el de la desviación.

Esto supuesto: *si en un prisma varía el ángulo de refringencia. ¿qué sucederá con los ángulos de emergencia y desviación?*

Res^n. Como que las magnitudes $\sphericalangle i$, $\sphericalangle r$ y n permanecen constantes: $\sphericalangle$ D, $\sphericalangle i'$, $\sphericalangle r'$ son funciones de la variable $\sphericalangle$ R; y así, para un pequeño incremento ΔR de ésta, sale de la (l)

$$\sphericalangle r + \sphericalangle r' + \sphericalangle \Delta r' = \text{R} + \Delta \text{R},$$

ó, restando aquélla de ésta

$$\sphericalangle \Delta r' = \Delta \text{R}. \text{ [1]} \qquad (n)$$

[1] La operación que produce este resultado la llamaremos *tomar ó formar la diferencia.*

Conocida $\triangle r'$, la medida de la variación ó incremento del $\sphericalangle i'$, se determina entonces de la siguiente manera: por razón del incremento que adquiere la variable, es, por (k),

$$\text{sen.}[i'+\triangle i'] = n \times \text{sen.}[r'+\triangle r'],$$

ó $$\text{sen.}i' \times \cos.\triangle i' + \cos.i' \times \text{sen}\triangle i' = n(\text{sen}r' \times \cos.\triangle r'$$

$$+\cos.r' \times \text{sen.}\triangle r');$$

y, por ser $\triangle i'$, $\triangle r'$ cantidades indefinidamente pequeñas, se verificará, según la ecuación (11) del nº 44,

$$\text{lím.}\cos.\triangle i' = 1,\ \text{lím.sen.}\triangle i' = \frac{\triangle i'}{206\ 264{\cdot}8},\text{lím.}\cos.\triangle r' = 1,$$

$$\text{lím.sen.}\triangle r' = \frac{\triangle r'}{206\ 264{\cdot}8};$$

y así que la ecuación precedente sea en el límite,

$$\text{sen.}i' + \frac{\triangle i'}{206\ 264{\cdot}8} \times \cos.i' = n \times \text{sen.}r' + n \times \frac{\triangle r'}{206\ 264{\cdot}8} \times \cos.r';$$

por lo que, restando de ésta la ecuación (k), ó *tomando su diferencia*,

$$\sphericalangle \triangle i' \times \cos.i' = n \times \triangle r' \times \cos.r',$$

ó $$\sphericalangle \triangle i' = \frac{n \times \cos.r'}{\cos.i'} \triangle r',$$

medida de la desviación del rayo emergente respecto de la perpendicular.

Resulta, en fin, para el ángulo de desviación D, tomando la diferencia de la (m).

$$\sphericalangle\ \Delta i' = \Delta R + \Delta D,$$

ó, recordando la (n),

$$\sphericalangle\ \Delta D = \Delta i' - \Delta R = \Delta i' - \Delta r',$$

medida de la variación del ángulo de la desviación. Y como que

$$\frac{\text{sen.}\, i'}{\text{sen.}\, r'} = n, \text{ ó lím.} \frac{\text{sen.}\, i'}{\text{sen.}\, r'} = \frac{\Delta i'}{\Delta r'} = n,$$

para $n > 1$ resulta

$$\frac{\Delta i'}{\Delta r'} > 1, \text{ ó } \Delta i' > \Delta r',$$

$$\sphericalangle\ \Delta D = \Delta i' - \Delta r' > 0;$$

esto es: *el ángulo de la desviación de un prisma, crece al mismo tiempo que el ángulo de la refringencia, ó es una función creciente de éste* [nº 26].

3ª *Dado un círculo, hallar la posición de una secante que, moviéndose al rededor del úno de sus puntos de intersección, hace aproximarse á éste indefinidamente el ótro.*

Resⁿ. Si referimos el círculo O de radio r [fig. 8] al sistema X, Y de ejes rectangulares, cuyo origen está en el centro, sean $A\ B$ la secante, C, D los puntos de intersección, $C\,C' = y$, $O\,C'$ las coordenadas del primero, y $D\,D' = y'$, $O\,D'$, las del segundo. Esto supuesto, la posición que se pide quedará determinada, si se conocen la que tiene la secante en un momento dado, y la variación subsiguiente; y basta al intento expresar $O\,A = Y$ en función de y, y', lo que se puede hacer de dos maneras, á saber:

1ª Si se trazan por C, D las $C\,C''$, $D\,D''$ paralelas á $O\,X$, resulta $\Delta\ A\ C\ C'' \sim C\ D\ E$; y así

$$\frac{A\,C''}{C\,C''} = \frac{C\,E}{D\,E};$$

ó, recordando los valores de las ordenadas, y expresando las abscisas por éstas y el radio, en virtud de los triángulos rectángulos formados,

$$\frac{Y - y}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{y - y'}{D'O - C'O} = \frac{y - y'}{\sqrt{r^2 - y'^2} - \sqrt{r^2 - y^2}},$$

ó

$$Y - y = \frac{(y - y')\sqrt{r^2 - y^2}}{\sqrt{r^2 - y'^2} - \sqrt{r^2 - y^2}},$$

ó, finalmente,

$$Y = y + \frac{(y - y')\sqrt{r^2 - y^2}}{\sqrt{r^2 - y'^2} - \sqrt{r^2 - y^2}};$$

esta ecuación da la posición de la secante en el momento ó situación indicada en la figura.

Pero esta misma ecuación que es, por decirlo así, como la raíz primera que alimenta el árbol frondoso y gigantesco del cálculo sublime, puede encontrarse con más prontitud, de esta manera.

2ª Se sabe que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, cuyas coordenadas respectivas son t' y u', t'' y u'', siendo T, U las coordenadas corrientes ó generales, tiene la forma

$$T-t'=\frac{t'-t''}{u'-u''}(U-u'). \qquad \text{(o)}$$

Ahora bien, pasando la recta $A\ B$ por los dos puntos C, D supuestos, habrá de ser

$$T=A\,O=Y, U=0;\ t'=C\,C'=y,\ u'=O\,C'=\sqrt{r^2-y^2};$$

$$t''=D\,D'=y',\ u''=O\,D'=\sqrt{r^2-y'^2};$$

por lo que resultará de la (o), con estos valores,

$$Y-y=\frac{y-y'}{\sqrt{r^2-y^2}-\sqrt{r^2-y'^2}}\times-\sqrt{r^2-y^2}$$

$$=\frac{(y-y')\sqrt{r^2-y^2}}{\sqrt{r^2-y'^2}-\sqrt{r^2-y^2}}.$$

ó, finalmente,

$$Y=y+\frac{(y-y')\sqrt{r^2-y^2}}{\sqrt{r^2-y'^2}-\sqrt{r^2-y^2}}. \qquad \text{(p)}$$

como antes.

Esto supuesto, si por moverse constantemente al rededor del punto C, la secante $A\ B$, lo que hace fija ó invariable la ordenada y, se acerca más y más á ése el punto C, tendrá de verificarse en la aproximación indefinida, *lím.* $y'=y$; por lo que llegará á ser la (p),

$$\text{lím. } Y=\text{lím.}\left(y+\frac{(y-y')\sqrt{r^2-y^2}}{\sqrt{r^2-y'^2}-\sqrt{r^2-y^2}}\right).$$

ó $$\text{lím. } Y = y + \frac{0}{0}, \qquad \text{(q)}$$

forma indeterminada ciertamente (nº 38, 1º); porque, llegando á coincidir el punto *D* con el *C*, ó formando los dos un solo punto; como se sabe que por él pueden pasar infinitas rectas, parece que son infinitas las que llegarán á ser, en el supuesto del problema, la secante, ó que ésta, en el mismo caso, tendrá infinitas posiciones, ó que es para ella indeterminada su posición; y es lo que indica justamente el segundo término del segundo miembro de la (q). Mas, como la dicha secante en todas las posiciones que adquiera está siempre referida á los ejes *X*, *Y* no es en verdad uno solo el punto por donde pase al cumplirse con la condición, sino que son dos, y si se quiere tres; por lo que adquirirá *Y* un valor límite ó fijo, que es necesario determinarlo. Con este fin, sale de la (p).

$$Y = y + \frac{(y-y')\sqrt{r^2-y^2}(\sqrt{r^2-y'^2}+\sqrt{r^2-y^2})}{(\sqrt{r^2-y'^2}-\sqrt{r^2-y^2})[\sqrt{r^2-y'^2}+\sqrt{r^2-y^2}]}$$

$$= y + \frac{[y-y']\sqrt{r^2-y^2}[\sqrt{r^2-y'^2}+\sqrt{r^2-y^2}]}{y^2-y'^2}$$

$$= y + \frac{\sqrt{r^2-y^2}[\sqrt{r^2-y'^2}+\sqrt{r^2-y^2}}{y+y'};$$

ó, cumpliéndose la condición en este estado, por ser lím. $y' = y$,

$$\text{lím. } Y = \text{lím.}\left[y + \frac{\sqrt{r^2-y^2}[\sqrt{r^2-y'^2}+\sqrt{r^2-y^2}]}{y+y'}\right]$$

$$=y+\frac{2[\sqrt{r^2-y^2}]^2}{2y}=y+\frac{r^2-y^2}{y}=\frac{r^2}{y},$$

ó, escribiendo lím. $Y=Y'=O\ T$,

$$Y'=\frac{r^2}{y}, \qquad [r]$$

valor determinado de la forma indeterminada [q]; y, como sale de [r],

$$r^2=Y'\times y, \text{ ú } O\ C^2=O\ T\times O\ C'',$$

resulta que, *en el momento de cumplirse con la condición, ó de coincidir en uno los dos puntos, el radio dirigido al punto de coincidencia* ES MEDIO PROPORCIONAL Á SU PROYECCIÓN SOBRE EL EJE DE ORDENADAS Y Á LA ORDENADA DEL PUNTO DONDE LO CORTA Á ÉSTE LA SECANTE; luego *es un triángulo rectángulo el formado por dicha ordenada, el radio y el segmento correspondiente de la secante;* esto es,

$$\sphericalangle\ T\ C\ O=R, \text{ ú } O\ C\perp T\ U' \text{ pos}^{\text{n}}. \text{ lím. de la sect.};$$

luego, por transformarse dicha secante en una tangente en virtud de coincidir en un punto los dos de intersección primitivos, adquiere aquélla una posición determinada, lo que prueba la verdad de la [r]. En resumen:

Si en un círculo una secante se mueve indefinidamente al rededor de uno de sus puntos de intersección, LA POSICIÓN LÍMITE DE ELLA ES LA TANGENTE AL CÍRCULO, DIRIGIDA POR DICHO PUNTO: esta propiedad, que la Análisis algébrica demuestra *usque ad satietatem*, como acabamos de verlo, forma la definición de la tangente en la Geometría analítica.

(Continuará)