TRATADO

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

POR EL MISMO PROFESOR

Continuación de la página 414, número 124

Por tanto, en el caso de las figuras 26 y 27, la recta del espacio es, respectivamente, perpendicular al plano horizontal delante del vertical en el diedro primero ó cuarto, en el plano vertical, ó detrás de éste, en el diedro segundo ó tercero; ó, al vertical en el diedro primero ó segundo, en el horizontal ó debajo de éste, en el diedro cuarto ú opuesto.

VII. Proyecciones perpendiculares á la línea de tierra. Como, verificado el enhiestamiento, resultan dos líneas perpendiculares á la de tierra, lo es á la misma el plano por ellas determinado: quiere decir, que los planos proyectantes de la recta se reducen á uno solo perpendicular á la línea de tierra; y como que en un plano puede situarse un número infinito de rectas en todas las direcciones posibles, se infiere que, el caso actual, es indeterminado, de conformidad con lo dicho en el nº 40, Excep-2ª. Ahora bien, como, sea cual fuere la dirección que tengan las rectas en dicho plano, se pueden siempre dirigir en él, por el pie de la línea de tietra, rectas paralelas respectivamente á las supuestas y que, por estar en el plano, serán perpendiculares á esa línea, se infiere, que *si las proyecciones son perpendiculares á la línea de tierra, resultan en el espacio infinitas rectas perpendiculares á esta línea.*

De estas rectas perpendiculares, únas lo serán de cualquier modo á la línea de tierra, sin cortarla; ótras serán también perpendiculares á los planos bisectores de los diedros; unas terceras tendrán en el espacio cualesquiera direcciones, cortando la línea de tierra; y unas cuartas, cortándola igualmente, se hallarán en dichos planos bisectores, según que, respectivamente, los puntos que se supongan ser trazas de las rectas, disten desigualmente de esa línea, ó equidisten de ella; ó que, coincidiendo con un punto de la misma, las proyecciones de la recta tengan desiguales dimensiones, ó sean éstas, en el mismo caso, iguales.

48. **RESUMEN.** Como una consecuencia de todo lo dicho en el nº precedente, dadas en descriptiva las proyecciones de una recta, se determina, su posición en el espacio, ó referida á los planos de proyección, mediante las siguientes reglas:

1ª *Si las proyecciones son oblicuas á la línea de tierra sin cortarla*, se hallará la recta del espacio en el diedro principal ú opuesto. en el de atrás ó de abajo, según que, estando á distinto lado de esa línea las proyecciones, se encuentre en el primer caso por debajo ó encima la horizontal; ó ambas proyecciones, por encima ó debajo de la misma línea en el segundo: y sin cortarla en ninguno de ellos.

2ª *Si las proyecciones son oblicuas á la línea de tierra, cortándola y formando ángulos desiguales con la misma*, se hallará la recta del espacio, cortándola también de cualquier modo, en el diedro principal pasando al opuesto. ó viceversa; ó en el de atrás pasando al de abajo, ó viceversa, según que, estando á distinto lado de esa línea las proyecciones, se encuentre, en el primer caso, por debajo ó encima la horizontal; ó ambas proyecciones por encima ó debajo de la misma línea, en el segundo.

3ª *Si las proyecciones son oblicuas á la línea de tie-*

rra, cortándola y formando ángulos iguales con la misma, se hallará la recta del espacio, cortándola también en el plano bisector de los diedros principal ú opuesto, ó en el bisector de los diedros de atrás ó de abajo, según que, estando á distinto lado de esa línea las proyecciones, se encuentre, en el primer caso, por debajo ó encima la horizontal; ó, ambas proyecciones confundidas en una sola por encima ó debajo de la misma línea, en el segundo.

4.ª *Si la úna de las proyecciones es paralela á la línea de tierra y oblicua la ótra*, la recta del espacio será paralela al plano de proyección de nombre contrario al de aquélla: *al horizontal en la región anterior*, si la proyección vertical está por encima de la línea de tierra ó ambas proyecciones por debajo de la misma; *en la región posterior* si éstas se hallan por encima de la línea de tierra ó la vertical por debajo: *al plano vertical de proyección en la región superior*, si la proyección horizontal está por debajo de la línea de tierra ó ambas por encima de ella; *y en la región inferior* si éstas se hallan por debajo de la línea de tierra ó la horizontal por encima.

5.ª *Si ambas proyecciones son paralelas á la línea de tierra*, la recta del espacio le será también paralela; *ó, lo que es lo mismo*, será la recta del espacio paralela á los planos de proyección: *de cualquiera manera en el diedro primero ú opuesto*, si las proyecciones están á diferente lado de la línea de tierra, y, distando desigualmente de ésta, se encuentra la horizontal por debajo ó encima de dicha línea: *en el segundo ó de abajo*, si ambas proyecciones están por encima ó debajo de la línea indicada: *en los planos bisectores de los diedros respectivos si, en los mismos casos*, las proyecciones equidistan de la línea de tierra, hallándose á diferente lado; ó por el mismo, confundidas en una recta.

6.ª *Si las proyecciones coinciden en la línea de tierra*, en la misma, confundida con ellas, se hallará la línea del espacio.

7.ª *Si la úna de las proyecciones tiene una dirección perpendicular á la línea de tierra, y la ótra es un punto*, la recta del espacio, pasando por el punto, será perpendicular al plano de proyección del mismo nombre.

8ª *Si ambas proyecciones forman una línea perpendicular á la de tierra,* lo será á ésta la línea del espacio: *no cortándola si, dadas las trazas,* se hallan fuera de la de tierra; *y si equidistan de la misma ó están confundidas en un punto,* la recta del espacio será además, perpendicular á los planos bisectores de los respectivos diedros: *cortándola,* si dichas trazas coinciden en un punto de la misma; *y si las proyecciones tienen además, longitudes iguales,* la recta del espacio, cortando perpendicularmente la línea de tierra, estará situada en los planos bisectores de los diedros.

OBSERVACION.—Si la recta perpendicular á la línea de tierra, y formada por las proyecciones, se da sin ninguna condición particular, la del espacio no tendrá posición determinada; y resulta la excepción que se indicó en el nº 40, caso 2º: cierto que la recta del espacio será perpendicular á la línea de tierra; pero podrá y no cortarla, teniendo, de úna y otra manera, diferentes posiciones. Si es la dirección de las proyecciones la indicada en los otros dos casos del mismo nº, queda dicho lo que sucederá entonces; é insistiendo en el 3º, añadimos que el plano proyectante respecto de la proyección oblicua á la línea de tierra, es oblicua á la misma; y de aquí que lo sean á ésta generalmnnte todas las rectas posibles, situadas en dicho plano; mas el plano proyectante respecto de la proyección perpendicular, siendo también perpendicular á la línea de tierra, contendrá un número infinito de rectas perpendiculares á esta línea: de aquí la incompatibilidad en la dirección de una misma recta del espacio respecto de la línea de tierra. Pero como tales planos proyectantes se cortan en una recta que pasa por el punto donde las proyecciones cortan la línea de tierra, intersección que coincide con la proyección perpendicular, la intersección indicada será la única recta posible del espacio; y como que entonces la proyección de ella en el otro plano es un punto de la línea de tierra: el caso será posible solamente si la proyección oblicua se reduce á un punto que está en dicha línea: á la verdad, todas las rectas dibujadas en un plano por la traza de ótra obli·

cua al mismo, lo son, excepto una sola que resulta perdendicular, oblicua á esta línea. Si el punto proyección está fuera de la línea de tierra, es necesario, para la posibilidad del problema, que se halle en línea recta con la otra proyección, como ya se ha dicho.

50. **RESENTACION DE UNA RECTA.**—En virtud de las reglas dadas en el nº precedente, podemos, como en el caso del punto (nº 29, Corol. 2º, Observación), representar una recta, conocidas que sean sus proyecciones, bien refiriéndola á los planos de proyección en perspectiva caballera, bien por el método de los planos acotados. Así:

1º *Representación en perspectiva.* Se quiere, por ejemplo, representar la recta cuyas proyecciones son las dadas en el dibujo 4º de la fi5ura 16, caso explicado ya en el nº 47, *d).* Con este fin, verificado el enhiestamiento, sean XLTX', YLTY' (fig. 32) los planos en perspectiva, y que se los supondrá limitados de la manera que lo indica la figura: valiéndose de una cierta escala, tómese la L*v* de aquella figura sobre la LT de ésta; y en la perpendicular por *v* á la LT, trazada por debajo, llévese la *vv'* usando de la misma escala: así se conocerá el punto *v'* ó el V, traza vertical de la recta. De una manera análoga, determinado en la nueva figura el punto *h'*, en el plano horizontal y por delante del vertical se hallará el *h* ó, mejor dicho, la traza horizontal H de la recta: la línea AB que úna los puntos H,V, es la representación de la recta de que se trata.

De conformidad con lo explicado en la *nota* del caso *d)* aludido, es VH el segmento invisible á que se refieren las proyecciones de la figura 16, dibujo 4º, y HM un segmento de la misma, visible en el diedro principal; por lo que las proyecciones respectivas se han dibujado como se ve en la figura, de conformidad con la notación establecida (nº 43, *rectas*); y, como era de colegirse, la recta AB se prolonga indefinidamente en el espacio del diedro tercero ú opuesto.

2º *Representación por el método de los planos acotados.* En el mismo caso de la figura 16, dib. 4º, y, sin verificar el enhiestamiento de los planos, se obtendrá la recta AB ó el segmento HV referido al horizontal de proyección, con sólo dirigir por el punto *v*, y debajo de la *vh*, una perpendicular á ésta, é igual á la *vv'*: la recta que úna el extremo libre de la perpendicular y el punto *h*, es dicho segmento. Si por delante ó debajo de la *v'h'*, y desde *h'*, la perpendicular á ella, se hace igual á *hh'*, la recta que úna el extremo libre de la perpendicular y el punto *v'* será también el segmento ó recta del espacio, referida al plano vertical de proyección.

51. **POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS.**—Dos rectas del espacio se pueden ó no encontrar en un mismo plano: en el primer caso, se cortan ó son paralelas entre sí; en el segundo, jamás se cortarán ni serán paralelas, y se dice entonces que las *rectas se cruzan*. De esta manera dos rectas cualesquiera del espacio, sólo pueden tener tres posiciones relativas, á saber: *cortarse* ó *ser paralelas* ó *cruzarse;* y las propiedades de las proyecciones en cada uno de estos casos, las manifiestan los siguientes:

TEOREMAS

I *Si dos rectas se cortan en el espacio,* **se cortarán también, respectivamente, las proyecciones del mismo nombre, determinando las intersecciones una línea perpendicular á la de tierra; ó, cortándose dos proyecciones del mismo nombre, las ótras dos se confundirán en una.**

Observación. Dos proyecciones de un mismo nombre se confundirán en una sola, cuando se confundan en uno los planos proyectantes respectivos.

Demosn. 1ª *parte.* Decimos, que dadas las dos rectas AB, CD del espacio, que se cortan en el punto M, las proyecciones en descriptiva se cortarán también en los puntos *m–m'* (fig. 33, dib. 1º); y debe ser

$$mm' \perp LT.$$

Pues, por ser el M un punto común á las rectas dadas, estará él en ellas; y así las proyecciones de éste se hallarán en las correspondientes de las rectas (nº 39, Corol.); luego los m, m', proyecciones del punto, son comunes á las proyecciones del mismo nombre de las rectas; quiere decir, que se cortan respectivamente las del mismo nombre; y como que por *estar el punto M referido á los planos de proyección, las proyecciones del punto, en descriptiva, determinan una perpendicular á la de tierra* (nº 28, Teor.); resulta evidentemente,

$$mm' \perp LT$$

L.Q.D.D.

2ª *parte.* Si respecto del plano horizontal, por ejemplo (fig. 33, dib. 2º), están las rectas dadas con la proyectante del punto de intersección M, en un mismo plano; éste, por ser perpendicular al plano horizontal de proyección, es á un tiempo el plano proyectante de las rectas; ó, lo que es lo mismo, los planos proyectantes verticales de éstas se confunden en uno solo; y así que la intersección de tal plano con el de proyección aludido, sea la proyección del mismo nombre de cada una de las rectas: ó que las proyecciones del mismo nombre de éstas se confundan en una sola, cortándose no obstante en el punto m' el otro par de proyecciones. Ahora bien, por coincidir ab, cd, tienen todos sus puntos comunes; luego lo tienen el m, proyección horizontal de la intersección de las rectas del espacio; y que sea, por el caso anterior, $mm' \perp LT$.

Nota. En el 2º caso, la proyección horizontal m correspondiente al punto donde se cortan las proyecciones verticales de las rectas, es de suyo indeterminada; pero se la puede conocer ó determinar, trazando por m' la línea de correspondencia respectiva: el punto donde ella corte las proyecciones confundidas en una, de las rectas, es la proyección del mismo nombre de la intersección de éstas.

II *Si dos rectas son paralelas en el espacio,* lo serán también, respectivamente, las proyecciones del mismo nombre; ó, siéndolo dos proyecciones del mismo nombre, las ótras dos se confundirán en una.

OBSERVACION. Dos proyecciones de un mismo nombre, de dos rectas paralelas, se confunden en una sola, cuando se confunden en uno los planos proyectantes respectivos.

Demosⁿ. 1ª *parte*. Decimos, que dadas las dos rectas AB, CD [fig. 34], en el espacio paralelas entre sí, tienen de verificarse

$$ab \ddagger cd, \quad a'b' \ddagger c'd'$$

Pues, bajando de la AB la *Aa* perpendicular al plano horizontal; lo mismo que de la CD, la *Cc* perpendicular á este plano: será *Aa* ‡ *Cc;* y así que los planos proyectantes verticales de las AB, CD sean paralelos entre sí; luego, cortados por el horizontal de proyección LTX, *resultarán paralelas entre sí las proyecciones horizontales ó de un mismo nombre de las rectas.*

Por igual razón *serán paralelas entre sí las proyecciones verticales a'b', c'd' de las mismas rectas.*

En el rebatimiento, ó en descriptiva, las proyecciones se representarán de la manera que lo indica el dibujo 1º de la figura 35, donde son *ab* ‡ *cd*, *a'b'* ‡ *c'd'*.

2ª *parte*. Si dos planos proyectantes, los verticales por ejemplo, de las rectas dadas, se confunden en uno solo (fig. 35, dib. 2º), no habrá más que una sola intersección entre éste y el plano de proyección horizontal, intersección que será, á un tiempo, *la proyección del mismo nombre de ambas rectas.* Mas, por lo visto en la 1ª *parte*, los planos proyectantes relativos al vertical de proyección, serán paralelos entre sí; luego las intersecciones verticales de aquél con éste ó *las proyecciones de un mismo nombre de las rectas, serán también paralelas.*

(Continuará).