TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

Continuación de la página 510, número 125

VII

TEORIA DE LAS FUNCIONES CICLOMETRICAS.

46. Partes que se consideran.—Hasta aquí quedan estudiadas sólo las funciones trigonométricas ó, con más propiedad, las que podríamos llamar *funciones goniométricas, porque se refieren directamente á los ángulos;* conviene pues, tratar ahora de otra clase de funciones trigonométricas, que son las conocidas con el nombre de **ciclométricas**—de κύκλος, círculo;—y acerca de ellas se deben investigar: 1º, qué sean tales funciones; 2º, sus límites; 3º, qué valores se les pueden asignar; 4º, qué relaciones ligan á las funciones de esta clase, cuando pertenecen á un mismo arco; 5º, qué otras relaciones existan entre ellas; 6º, finalmente, cuál sea la expresión de la suma y diferencia de dos arcos, empleando dichas funciones.

Se colige, que la división más natural de las funciones trigonométricas, lo es en **goniométricas** y **ciclométricas**.

I. **Significación de las funciones ciclométricas.**—Estas funciones de ordinario se refieren á los arcos, lo que se manifiesta aún por la etimología—*ciclos*, círculo, circunferencia ó arco;—mas, como las goniométricas pueden también ser referidas á los arcos, lo dicho no puede constituir la diferencia entre únas y otras funciones. Pero, sabiendo que *funciones trigonométricas son las relaciones establecidas entre las líneas trigonométricas de los arcos ó ángulos y los radios respectivos;* resulta, que *funciones goniométricas son las trigonométricas, cuando se consideran las relaciones indicadas como variables dependientes; y los arcos ó ángulos, como variables independientes; al contrario, son funciones ciclométricas las trigonométricas cuando se consideran los arcos ó ángulos como variables dependientes; y las relaciones aludidas, como variables independientes:* luego, supuestas las goniométricas, *las funciones ciclométricas son las inversas; y viceversa.* Así, para la función goniométrica

$$y = \text{sen.}x,$$

en la que más directamente se considera el ángulo x, será la ciclométrica correspondiente

$$x = \text{arc.sen.}y,$$

que se lee: *x es un arco cuyo seno es y;* y se ve que la expresión está referida directamente al arco y no al ángulo. Se sigue, que habrá tantas funciones ciclométricas, cuantas sean las goniométricas, es decir, *ocho;* y únas y ótras se manifiestan en los cuadros siguientes:

Funciones goniométricas.	**Fnnciones ciclométricas.**
$y=\text{sen.}x,$	$x=\text{arc.sen.}y$
$y=\text{tg.}x,$	$x=\text{arc.tg.}y$
$y=\text{sec.}x,$	$x=\text{arc.sec.}y$
$y=\text{sen.vers.}x,$	$x=\text{arc.sen.vers.}y$
$y=\text{cos.}x,$	$x=\text{arc.cos.}y$
$y=\text{cotg.}x,$	$x=\text{arc.cotg.}y$
$y=\text{cosc.}x,$	$x=\text{arc.cosc.}y$
$y=\text{cos.vers.}x,$	$x=\text{arc.cos.vers.}y$

II. Límites de algunas funciones ciclométricas.—1º Para encontrar el valor de

$$\text{lím.}\frac{\text{arc.sen.}\delta}{\delta},$$

escríbase

$$\text{arc.sen.}\delta=\beta, \text{ y así } \delta=\text{sen.}\beta;$$

por tanto

$$\frac{\text{arc.sen.}\delta}{\delta}=\frac{\beta}{\text{sen.}\beta}=\frac{1}{\frac{\text{sen.}\beta}{\beta}};$$

y, según la fórmula [11],

$$\text{lím.}\frac{\text{arc.sen.}\delta}{\delta}=\text{lím.}\ \frac{1}{\frac{\text{sen.}\beta}{\beta}}=\frac{1}{1}=1. \qquad (15)$$

2º El valor de

$$\text{lím.}\frac{\text{arc.tg.}\delta}{\delta}$$

se encuentra de una manera análoga: así,

$$\frac{\text{arc.tg.}\delta}{\delta}=\frac{\beta}{\text{tg.}\beta}=\frac{1}{\frac{\text{tg.}\beta}{\beta}};$$

y, según la fórmula [13],

$$\text{lím.}\frac{\text{arc.tg.}\delta}{\delta}=\text{lím.}\ \frac{1}{\frac{\text{tg.}\beta}{\beta}}=\frac{1}{1}=1. \qquad [15]$$

III. Valores que se pueden asignar á las funciones ciclométricas para ciertos valores de las goniométricas.—Como un mismo valor de una función goniométrica corresponde á diferentes arcos ó ángulos, porque para el valor 1, por ejemplo, del seno, puede ser el arco $x=\frac{1}{2}\pi,\ {}^3/_2\pi,\ {}^5/_2\pi,\ldots$; sucede también lo mismo con las funciones ciclométricas, lo que puede originar ambigüedades en muchos casos; y para evitarlas, supuestos valores determinados de las relaciones goniométricas, se tomarán los arcos entre ciertos límites, de la manera que pasamos á indicar:

1º Si se tiene

$$z=\text{sen.}x,\ \text{será}\ x=\text{arc.sen.}z;$$

luego,

$$\text{variando}\ z\left\{\begin{array}{l}\text{de } 0 \text{ á } 1,\\ \text{y ,, } 1 \text{ á } 0;\end{array}\right.\quad \text{estará}\ x\left\{\begin{array}{l}\text{entre } 0^\circ \text{ y } \frac{1}{2}\pi,\\ \text{y ,, } \frac{1}{2}\pi \text{ y } \pi.\end{array}\right.$$

2º Si se tiene

$$z=\text{tg.}x,\ \text{será}\ x=\text{arc.tg.}z;$$

luego,

$$\text{variando}\ z\left\{\begin{array}{l}\text{de } 0 \text{ al } \infty,\\ \text{y ,, } 0 \text{ á} -\infty;\end{array}\right.\quad \text{estará}\ x\left\{\begin{array}{l}\text{entre } 0^\circ \text{ y } \frac{1}{2}\pi,\\ \text{y ,, } 0^\circ \text{ y} -\frac{1}{2}\pi.\end{array}\right.$$

3º Si se tiene

$$z = \sec. x, \text{ será } x = \text{arc.sec.} z;$$

luego,

variando $z \begin{cases} \text{de } 1 \text{ á } \infty, \\ \text{y ,, } \infty \text{ á} -1; \end{cases}$ estará $x \begin{cases} \text{entre } 0^\circ \text{ y } \frac{1}{2}\pi, \\ \text{y ,, } \frac{1}{2}\pi \text{ y } \pi. \end{cases}$

4º Si se tiene

$$z = \cos. x, \text{ será } x = \text{arc.cos.} z;$$

luego,

variando $z \begin{cases} \text{de } 1 \text{ á } 0, \\ \text{y ,, } 0 \text{ ,,} -1; \end{cases}$ estará $x \begin{cases} \text{entre } 0^\circ \text{ y } \frac{1}{2}\pi, \\ \text{y ,, } \frac{1}{2}\pi \text{ y } \pi; \end{cases}$

5º Si se tiene

$$z = \cot. x, \text{ será } x = \text{arc.cot.} z;$$

luego,

variando $z \begin{cases} \text{de } \infty \text{ á } 0, \\ \text{y ,, } 0 \text{ á} -\infty; \end{cases}$ estará $x \begin{cases} \text{eatre } 0^\circ \text{ y } \frac{1}{2}\pi, \\ \text{y ,, } \frac{1}{2}\pi \text{ y } \pi. \end{cases}$

6º Si se tiene

$$z = \text{cosc.} x, \text{ será } x = \text{arc.cosc.} z;$$

luego,

variando $z \begin{cases} \text{de } \infty \text{ á } 1, \\ \text{y ,, } 1 \text{ á } \infty; \end{cases}$ estará $x \begin{cases} \text{entre } 0^\circ \text{ y } \frac{1}{2}\pi, \\ \text{y ,, } \frac{1}{2}\pi \text{ y } \pi. \end{cases}$

NOTAS. 1ª—Contiene advertir que, en ocasiones, dados los arcos por sus magnitudes angulares, ó por sus valores en longitud ó lineales, hay que expresar, con ciertos fines, la una cantidad por la ótra; y como que una circunferencia puede tomarse ó repetirse sobre sí misma un número infinito de veces; se infiere, que los valores lineales de los arcos pueden ser cualesquiera, y estar de este modo comprendidos entre o y $\pm\infty$, si bien el que corresponde á sólo una circunferencia lo define la forma muy conocida $2\pi r=C$: ya se sabe que la manera como se procede cuando se presentan esos cambios, supuesto un arco α, lo manifiesta la ecuación

$$x=\frac{\pi\alpha}{180^\circ}\times r, \qquad \text{(a)}$$

ó, si la longitud x se expresa en partes del radio, de manera que sea $\frac{x}{r}=y$, convirtiendo, además, el arco ó ángulo α en segundos,

$$\text{(17)} \qquad y=\frac{x}{r}=\frac{\pi\alpha''}{180\times60^2}=\frac{3{\cdot}14\,159\times\alpha''}{648\,000''}=\frac{\alpha''}{206\,264''{\cdot}8},$$

divisor conocido (n.^{os} 44 y 45); porque, como ya se ha insinuado, *es el número de los segundos contenidos en un arco de una longitud igual al radio de la circunferencia de que es una parte ese arco.*

La fórmula (17) enseña pues, á determinar la longitud de un arco cualquiera expresado en valor angular; y se comprende, que si el arco se refiere á un radio diferente de la unidad, habrá que multiplicar el resultado por r, una vez que tiene de ser

$$x=\frac{\alpha''}{206\,264''{\cdot}8}\times r. \qquad \text{(b)}$$

Así, respecto del arco ó ángulo $\alpha=172^\circ25'13''$, resultará de la [17],

$$y=\frac{620\,713''}{206\,264''{\cdot}8}=3{\cdot}009\,301;$$

por lo que

$$\text{sen.}\,172^\circ 25' 13'' = \text{sen.}\,3{\cdot}009\,3.$$

2.ª De la ecuación citada, ó de la [b], sale

$$[18] \qquad \sphericalangle\, a'' = 206\,264''{\cdot}8 \times y = 206\,264''{\cdot}8 \times \frac{x}{r},$$

que es, recíprocamente, el valor en segundos, ó angular, de una longitud x que, expresada en partes del radio, se la supusiera conocida. Por tanto, si es $y = {}^5/_6$, se obtiene

$$\sphericalangle\, \alpha = 206\,264''{\cdot}8 \times {}^5/_6 = 171\,887''{\cdot}3 = 47^\circ 44' 47''{\cdot}3;$$

y así,

$$\text{sen.}\,{}^5/_6 = \text{sen.}\,47^\circ 44' 47''{\cdot}3.$$

3.ª Si dado un arco en medida angular, se quisiera conocer el radio á que correspondiera un supuesto valor lineal del arco, se tendría, por la [b],

$$r = \frac{206\,264''{\cdot}8}{a''} \times x.$$

Así, un arco de $25^\circ\ 15'$ tendrá la longitud de $8^{m}{\cdot}50$ para un radio ó distancia al centro, expresada por

$$r = \frac{206\,264''{\cdot}8}{90\,900''} \times 8^{m}{\cdot}50 = 8^{m}{\cdot}5 \times 2{\cdot}269 = 19^{m}{\cdot}286\,5.$$

4.ª Por lo visto en lo que precede y en los n.^{os} 44 y 45, el valor 206 264″·8 es de la mayor importancia en la análisis; pues que, entre otras cosas, permite *establecer la homogeneidad de las ecuaciones goniométricas.* En efecto, tratándose de ángulos muy pequeños, se ha visto [ecua.ˢ 12 y 14] que, en el límite, es

$$\text{sen.}\delta=\delta,\quad \text{tg.}\delta=\delta;$$

pero tales ecuaciones así escritas, serían heterogéneas, porque *sen.*δ, *tg.*δ son números abstractos, mientras que δ es un número concreto, una magnitud angular, de ordinario expresada en segundos de arco. Mas, recordando lo dicho en los números citados, tiene de escribirse en verdad,

$$\text{sen.}\delta=\frac{\delta}{206\ 264''{\cdot}8},\quad \text{tg.}\delta=\frac{\delta}{206\ 264''{\cdot}8},$$

ó también

$$\delta=206\ 264''{\cdot}8\times\text{sen}\delta=206\ 264''{\cdot}8\times\text{tg.}\delta,$$

con lo que resultan las ecuaciones homogéneas.

IV. Relación entre las funciones ciclométricas de un mismo arco.—Tales relaciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{\text{a}} & \text{arc.sen.}x+\text{arc.cos.}x=\tfrac{1}{2}\pi, \\ 2^{\text{a}} & \text{arc.tg.}\ x+\text{arc.cot.}\ x=\tfrac{1}{2}\pi, \\ 3^{\text{a}} & \text{arc.sec.}x+\text{arc.cosc.}x=\tfrac{1}{2}\pi, \\ 4^{\text{a}} & \text{arc.sen.vers.}x+\text{arc.cos.vers.}x=\tfrac{1}{2}\pi \end{array}\right\}[19]$$

Demos.ⁿ Para la 1ª: si

$$x=\text{sen.}u=\text{cos.}(\tfrac{1}{2}\pi-u),$$

se verificará

$$u=\text{arc.sen.}x,$$

$$\tfrac{1}{2}\pi-u=\text{arc.cos.}x;$$

y, por suma,

$$\tfrac{1}{2}\pi=\text{arc.sen.}x+\text{arc.cos.}x,$$

que es la 1ª Con igual procedimiento, considerando la tangente y cotangente, secante y cosecante, &ª, se hallan las demás.

V. **Otras relaciones.**—Son las principales

1) $\text{arc.sen.}x=\text{arc.cos.}\sqrt{1-x^2}$
$=\text{arc.tg.}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$=\text{arc.cot.}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x},$

2) $\text{arc.cos.}x=\text{arc.sen.}\sqrt{1-x^2}$

3) $\text{arc.sec.}x=\text{arc.tg.}\sqrt{x^2-1},$

4) $\text{arc.tg.}x=\text{arc.sen.}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$=\text{arc.cos.}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$=\text{arc.cot.}\dfrac{1}{x}$

5) $\text{arc.cot.}x=\text{arc.tg.}\dfrac{1}{x},$

6) $\text{arc.cosc.}x=\text{arc.cot.}\sqrt{x^2-1}.$

(Continuará)