J. A. VELASCO

TRATADO

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

POR EL MISMO PROFESOR

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Continuación de la página 518, número 125

III *Si dos rectas se cruzan en el espacio,* **se cortarán, respectivamente, las proyecciones del mismo nombre, determinando sus intersecciones una línea oblicua á la de tierra; ó, cortándose dos proyecciones del mismo nombre, las ótras dos serán paralelas entre sí.**

OBSERVACION. Dos proyecciones del mismo nombre de dos rectas que se cruzan en el espacio, son paralelas, si sucede lo mismo con los planos proyectantes respectivos; y luego veremos que aun puede darse el caso en que, *cruzándose las rectas, son ambas clases de proyecciones respectivamente paralelas.*

Demos^{n}. 1ª *parte.* Relativamente al plano horizontal de proyección, el proyectante vertical de la AB, por ejemplo (fig. 36 dib. 1º), indefinidamente prolongado, cortará la recta CD; pues que dichas rectas no se encuentran en el mismo plano; y, si por el punto en que la línea proyectante de la intersección obtenida se encuentra con la AB, se imagina una paralela á la CD; cortándose la paralela y la AB, por el teorema I se cortarán también las proyecciones horizontales, ó del mismo nombre, de dichas rectas; pero la proyección de la CD es, idénticamente la de su paralela, á saber: la traza ó intersección con el horizontal, del plano que, conteniendo las dos, pasa por la línea proyectante indicada; luego se cortarán entre sí, en un punto *m*, las proyecciones horizontales de las rectas AB, CD, que se cruzan en el espacio.

Por un razonamiento igual se infiere, que se cortarán también en *n'* las proyecciones verticales de las mismas rectas. Mas las intersecciones respectivas de las proyecciones de igual nombre de las rectas, no son proyecciones de un mismo punto, pues que tal punto no puede existir desde que, por cruzarse en el espacio las rectas aludidas, no tienen ningún punto común; luego la línea determinada por esas intersecciones no pueqe ser perpendicular á la de tierra (nº 28, *Teor.*); y así *es aquélla oblicua respecto de ésta.*

Q. D. L. 1º

2ª *parte.* Crúcense las rectas de manera que las proyecciones verticales, por ejemplo (fig. 36, dib. 2º), se corten en virtud de lo procedentemente expuesto: puede suceder que el plano proyectante vertical de la úna sea paralelo al de igual nombre de la ótra; y estos planos cortados entonces por el horizontal de proyección, determinan dos líneas paralelas, que son las proyecciones de igual nombre de las rectas; luego, *cortándose dos proyecciones del mismo nombre*, hay casos en que *las otras dos son paralelas entre sí.*

La úna y la ótra de las propiedades que se acaban de demostrar se ven en la figura citada: en el dibujo 1º, cada par de proyecciones se cortan, pero es *mn'*, la recta de las intersecciones, oblicua á la línea de tierra; en el dibujo 2º, si bien *a'b'*, *c'd'* se cortan, es ab ‡ cd.

52. **CASOS INVERSOS.** Las recíprocas de las proposiciones anteriores son ciertas en virtud de los siguientes

ÁREA HISTÓRICA DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

TEOREMAS

I *Si en descriptiva las proyecciones de los mismos nombres de dos rectas se cortan, respectivamente, determinando sus intersecciones una línea perpendicular á la de tierra; ó si, cortándose dos proyecciones del mismo nombre, se confunden las otras dos en una sola:* **se cortarán las rectas del espacio.**

Demos^n^.: 1ª *parte.* Consideremos las proyecciones, horizontales, por ejemplo, *ab*, *cd* (fig. 33, dib. 1º) de las rectas: levantando por el punto *m*, intersección de las mismas, una línea perpendicular al plano horizontal de proyección, el proyectante vertical respecto de la *ab* contendrá esa línea proyectante; y lo mismo el plano proyectante de la *cd;* luego estos dos planos proyectantes se cortan; pues que tienen una línea común. Por igual razón se cortan los planos proyectantes de las proyecciones verticales *a'b'*, *c'd'*, y como que, por el enhiestamiento de los planos de proyección, se cortan éstos, se cortarán, respectivamente, los planos proyectantes de las proyecciones horizontales con los proyectantes de las verticales. Mas por ser $mm' \perp LT$, las líneas proyectantes de los puntos *m*, *m'* se cortan (nº 29, *Teor.*); luego el punto de intersección será común á los cuatro planos; y así que éstos se corten, pasando todas sus interseccionas por ese punto; pero tales intersecciones son las dos rectas del espacio; luego éstas tienen un punto común ó, en otros términos: *se producen dos rectas que se cortan en el espacio.*

Q. D. L. 1º

2ª *parte.* Por lo visto en la 1ª, los planos proyectantes de las proyecciones verticales *a'b'*, *c'd'* (fig. cit., dib. 2º), se cortan entre sí; y como por el enhiestamiento, los corta el proyectante único de las proyecciones horizontales *ab*, *cd*, que son una sola línea; este plano proyectante origina en el espacio dos rectas, á saber, las intersecciones del mismo con los dos primeros, intersecciones que tienen comun uno de los puntos de la línea en que se cortan estos planos; ó, en otros términos: *se producen dos rectas que se cortan en el espacio.*

Q. D. L. 2º

II *Si en descriptiva las proyecciones de los mismos nombres de dos rectas son respectivamente paralelas; ó, siéndolo dos proyecciones del mismo nombre, se confunden las otras dos en una sola:* **serán paralelas las rectas del espacio.**

Demosⁿ.: 1ª *parte.* Si por el punto *a*, por ejemplo, de la proyección horizontal *ab* (fig. 34, dib. 1º) se levanta una línea perpendicular al plano horizontal de proyección; esta línea y la proyección mencionada determinan el plano proyectante vertical respecto de la *ab;* por igual razón, la línea proyectante del punto *c* de la *cd* produce con ésta el plano proyectante respecto de la misma *cd*, y como por hipótesis es *ab* ‡ *cd;* y son paralelas entre sí las líneas proyectantes, resultan paralelos dichos planos proyectantes. De igual manera los planos proyectantes respecto de las *a'b'*, *c'd'* serán paralelos entre sí. Ahora bien, por el paralelismo del primer par de planos, toda línea de uno de éstos tiene de ser paralela al ótro, luego la recta AB, intersección de los planos proyectantes respecto de las *ab a'b'* es paralela al plano proyectante relativo á la *cd;* y es asimismo la AB paralela al plano proyectante que determina la *c'd';* luego es la línea AB paralela á la intersección de los planos proyectantes respecto de las *cd*, *c'd'* que es la recta CD del espacio; esto es:

AB ‡ CD

Q. D. L. 1º

2ª *parte.* Por lo visto en la 1ª los planos proyectantes relativos á las proyecciones verticales *a'b'*, *c'd'* (fig. cit., dib. 2º), son paralelos entre sí; y como, por el enhiestamiento, los corta el proyectante único de las proyecciones horizontales *ab*, *cd*, que son una sola línea; este plano provectante origina en el espacio dos rectas, á saber, las intersecciones AB, CD del mismo con los dos primeros, intersecciones que tienen de ser paralelas; ó, en otros términos: *se producen en el espacio dos rectas paralelas entre sí.*

Q. D. L. 2º

III *Si en descriptiva las proyecciones de los mismos nombres de dos rectas se cortan, respectivamsnte, determinando sus intersecciones una línea oblicua á la de tierra; ó si cortándose dos proyecciones del mismo nombre, son paralelas entre sí las otras dos:* **se cruzarán las rectas del espacio.**

Demosn. 1ª *parte.* Sean m', n (fig. 37) los puntos donde se cortan, respectivamente, las proyecciones verti- y horizontales: como la línea $m'n$ es oblicua á la LT, bájese del punto m' la $m'm \perp$ LT; y trácese por m, intersección de esa perpendicular con la cd, la $a_1b_1 \ddagger ab$: los dos pares de proyecciones a_1b_1 y $a'b'$, cd y $c'd'$ determinan dos rectas A_1B_1, CD que se cortarán en el espacio (teor. I); y como es, por construcción, $a_1b_1 \ddagger ab$, corresdiendo á las dos la única proyección vertical $a'b'$, tendrá de ser, por el teorema II,

$$A_1B_1 \ddagger AB; \qquad (a)$$

más, por cortarse las A_1B_1, CD, determinan un plano; y, por el paralelismo, las rectas (a) definen otro plano diferente; luego las AB, CD no pueden encontrarse en un mismo plano; y así que no puedan ni cortarse ni ser paralelas: luego *tales rectas se cruzarán en el espacio.*

Q. D. L. 1º

2ª *parte.* El plano proyectante vertical respecto de la ab (fig. 38, teor. I); corta los relativos á las proyecciones $a'b'$, $c'd'$ en dos rectas AB, C_1D_1 que se cortan, y por ser $ab \ddagger cd$ es el primer proyectante indicado, paralelo al del mismo nombre relativo á la cd; por lo que las intersecciones de estos dos planos con el proyectante respecto de la $c'd'$, tendrán de ser C_1D_1, CD, rectas paralelas; luego, por la razón aducida en la 1.ª *parte*, *AB*, *CD* no podrán encontrarse en un mismo plano; y así *tales rectas se cruzarán en el espacio.*

Q. D. L. 2.º

53. **EXCEPCION.** El segundo de los teoremas recíprocos no tiene, sin embargo, toda la generalidad apetecible: como ya se insinuó (n.º 51, teor. III, *Observ.*) hay un caso, en que, siendo paralelas, respectivamente, las proyecciones del mismo nombre, *pueden ó no serlo las rectas del espacio*, y resulta cuando dichas proyecciones son perpendiculares á la línea de tierra. A la verdad, por ser tales proyecciones perpendiculares á esta línea, son evidentemente las del mismo nombre respectivamente paralelas: ¿qué dirección tendrán entonces las rectas del espacio? Es manifiesto que, por el enhiestamiento subsiguiente, los planos proyectantes de cada recta, se confunden en uno solo perpendicular á la línea de tierra: de aquí que los dos planos á que se reducen los cuatro proyectantes, sean paralelos entre sí; y como las líneas trazadas en un plano pueden tener distintas direcciones con respecto á las trazadas en otro plano paralelo á aquél; se sigue, que las proyecciones aludidas pueden corresponder á muchas rectas del espacio, que tendrán diferentes direcciones entre sí: únas podrán ser paralelas; pero, por lo dicho, habrá ótras que no lo serán.

En este caso se puede conocer si las rectas son ó no paralelas en virtud de los siguientes

TEOREMAS

I (directo). *Las proyecciones y líneas proyectantes extremas de dos rectas paralelas limitadas*, **son proporcionales entre sí.**

Decimos, que si *ab*–*a'b'* (fig. 39), *cd*–*c'd'* son las proyecciones de dos rectas paralelas finitas AB, CD, cuyas líneas proyectantes extremas son *Aa* y *Bb*, *Aa'* y *Bb'* para la una; *Cc* y *Dd*, *Cc'* y *Dd'* para la ótra; debe ser

$$ab:cd=a'b':c'd'$$

$$Aa:Cc=Aa':Cc', \quad Bb:Dd=Bb':Dd'$$

Demosⁿ. Sean E, F los puntos donde se cortan las proyectantes Aa y Bb' de la primera, Cc y Dd' de la segunda: es evidente que, por tener los lados respectivamente paralelos, resulta $\triangle ABE \sim CDF$; y así

$$EB:FD=AE:CF,$$

ó, poniendo por estas magnitudes sus iguales,

$$ab:cd=a'b':c'd',$$

y es la primera de las proporciones que se debían de demostrar. Si ahora se unen los puntos a, a' y c, c', b, b' y d, d', resultan dos pares de triángulos semejantes, á saber:

$$\triangle Aaa' \sim Ccc', \quad \triangle Bbb' \sim Ddd';$$

por lo cual se obtienen

$$Aa:Cc=Aa':Cc', \quad Bb:Dd=Bb':Dd',$$

y son las otras dos proporciones que debían de demostrarse.

II (recíproco). *Si las proyecciones y líneas proyectantes extremas de dos rectas limitadas, son proporcionales,* **las rectas serán paralelas entre sí.**

Demosⁿ. Porque si, en el caso de la figura, se verifican

$$ab:cd=a'b':c'd',$$

$$Aa:Cc=Aa':Cc', \quad Bb:Dd=Bb':Dd';$$

resulta: 1º que los planos de las proyectantes horizontales y verticales, que contienen las rectas del espació, son paralelos, por ser perpendiculares á la línea de tierra; y 2º, se infiere de dichas proporciones que, si son

$$Aa \gtrless Cc, \quad Bb \gtrless Dd;$$

serán también

$$Aa' \gtrless Cc', \quad Bb' \gtrless Dd'$$

esto es: *los extremos de la una de las rectas, más ó menos altos sobre el plano horizontal respecto de los de la ótra, son también los más ó menos distantes del plano vertical;* y así tienen las rectas una misma dirección: luego, *son paralelas entre sí.*

L. Q. D. D.

Nota. Es necesario advertir, que aun los teoremas demostrados en el nº 51 pueden tener también sus excepciones cuando las rectas del espacio son perpendiculares á la línea de tierra: en el caso del teorema I no se cortan, respectivamente, las proyecciones del mismo nombre, sino que se confunden todas en una sola recta perpendicular, en descriptiva, á la línea de tierra; y en el caso del III, las proyecciones del mismo nombre son, respectivamente, paralelas, determinando las de cada recta, en descriptiva, una línea perpendicular también á la de tierra.

54. **APLICACION.**—Las teorías desarrolladas en los teoremas precedentes facilitan la manera de dirigir por un punto una recta paralela á ótra. Porque dadas en descriptiva las proyecciones de un punto y de una recta, basta dibujar por las proyecciones del punto dos líneas respectivamente paralelas á las proyecciones horizontal y vertical de la recta: dichas líneas, que serán las proyecciones de otra recta del espacio, determinan el paralelismo de ésta y la recta dada (nº 52, teor. II).

(Continuará)