# TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

## PARTE I

### ANALISIS ALGEBRICA

## LIBRO I

### DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

Continuación de la página 91, número 127

Demos$^n$. *Para la* 1$^a$: si se escribe

$$\text{arc.sen.}x=u, \quad \text{será } x=\text{sen.}u; \qquad [c]$$

es, además,

$$\cos.u=\sqrt{1-\text{sen}^2 u}=\sqrt{1-x^2}, \quad \text{ó} \quad u=\text{arc.cos.}\sqrt{1-x^2}, \qquad [d]$$

$$\text{tg.}u=\frac{\text{sen.}u}{\cos.u}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{ó}\ u=\text{arc.tg.}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad [e]$$

$$\text{cotg.}u=\frac{\cos.u}{\text{sen.}u}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ \text{ó}\ u=\text{arc.cot.}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}:\qquad [f]$$

igualando el valor de $u$, en la (c), con el de la (d), (e) y [f], se obtiene

$$\text{arc.sen.}x=\text{arc.cos.}\sqrt{1-x^2}=\text{arc.tg.}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc.cot.}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Q. E. L. 1.ª

*Para la* 2.ª: si se escribe

$$\text{arc.cos.}x=u,\ \text{será}\ x=\cos.u;$$

es además,

$$\text{sen.}u=\sqrt{1-\cos.^2u}=\sqrt{1-x^2},\ \text{ó}\ u=\text{arc.sen.}\sqrt{1-x^2}:$$

igualando los valores de $u$, se obtiene

$$\text{arc.cos,}x=\text{arc.sen.}\sqrt{1-x^2}.$$

Q. E. L. 2.ª

*Para la* 3.ª: si se escribe

$$\text{arc.sec.}x=u,\ \text{será}\ x=\text{sec.}u;$$

es, además,

$$\text{tg.}u=\sqrt{\text{sec.}^2u-1}=\sqrt{x^2-1},\ \text{ó}\ u=\text{arc. tg.}\sqrt{x^2-1}:$$

igualando los valores de $u$, se obtiene

$$\text{arc.sec.}x = \text{arc.tg.}\sqrt{x^2-1}.$$

Q. E. L. 3ª

*Para la* 4ª: si se escribe

$$\text{arc.tg.}x = u, \text{ será } x = \text{tg.}u; \tag{g}$$

es, además,

$$\text{sen.}u = \frac{\text{tg.}u}{\sqrt{1+\text{tg.}^2 u}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ ó } u = \text{arc.sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{h}$$

$$\cos.u = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg.}^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ ó } u = \text{arc.cos.}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{i}$$

$$\cot.u = \frac{1}{\text{tg.}u} = \frac{1}{x}, \text{ ó } u = \text{arc.cot.}\frac{1}{x}: \tag{j}$$

igualando el valor de $u$, en (g), con el de (h), (i) y (j) se obtiene

$$\text{arc.tg.}x = \text{arc.sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arc.cos.}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arc.cot.}\frac{1}{x}.$$

Q. E. L. 4ª

*Para la* 5ª: si se escribe

$$\text{arc.cot.}x = u, \text{ será } x = \cot.u;$$

es, además,

$$\text{tg.}u = \frac{1}{\text{cot.}u} = \frac{1}{x}, \text{ ó } u = \text{arc.tg.}\frac{1}{x}:$$

igualando los valores de $u$, se obtiene

$$\text{arc.cot.}x = \text{arc.tg.}\frac{1}{x}.$$

Q. E. L. 5ª

*Para la* 6ª: si se escribe

$$\text{arc.cosc.}x = u, \text{ será } x = \text{cosc.}u;$$

es, además

$$\text{cot.}u = \sqrt{\text{cosc.}^2 u - 1} = \sqrt{x^2 - 1}, \text{ ó } u = \text{arc.cot.}\sqrt{x^2 - 1}:$$

igualando los valores de $u$, se obtiene

$$\text{arc.cosc.}x = \text{arc.cot.}\sqrt{x^2 - 1}.$$

Q. E. L, 6ª

**VI. Expresión de la suma y diferencia de dos arcos.**—Como el seno y tangente son las funciones más generalmente usadas, trataremos de la suma y diferencia de dos arcos expresados en términos del seno y tangente.

1ª Suma y diferencia respecto del seno. Conviene investigar ante todo, la forma general de los arcos que tienen un mismo seno; y después, la forma que corresponde á un valor particular.

a). *Forma general.* Se ha indicado esta forma al hablar de las *funciones periódicas* (nº 27); pero conviene se conozca la manera de encontrarla. Para valores iguales del seno (fig. 11)

$$\frac{AB}{R}=\frac{A'B'}{R},$$

el arco puede ser considerado en sentido positivo ó negativo, de la manera siguiente:

para $\frac{AB}{R}$ (sentido positivo), son los arcos, ó ángulos,

$$u, +2\pi+u, +4\pi+u, +6\pi+u \ldots\ldots; \qquad \text{(k)}$$

y, en sentido negativo, son los arcos, ó ángulos,

$$-2\pi+u, -4\pi+u, -6\pi+u, \ldots\ldots; \qquad \text{(l)}$$

luego, según (k), (l), lo serán en úno y otro sentido,

$$u, \pm 2\pi+u, \pm 4\pi+u, \pm 6\pi+u, \ldots\ldots \qquad \text{(m)}$$



Para $\frac{A'B'}{R}$ (sentido positivo), son los arcos, ó ángulos,

$$+\pi-u, +3\pi-u, +5\pi-u, \ldots\ldots; \qquad \text{(n)}$$

y, en sentido negativo, son los arcos, ó ángulos.

$$-\pi-u, -3\pi-u, -5\pi-u, \ldots\ldots; \qquad \text{(ñ)}$$

luego, según [n], [ñ], lo serán en úno y otro sentido,

$$\pm\pi-u, \pm 3\pi-u, \pm 5\pi-u, \ldots\ldots \qquad [o]$$

Por tanto, según [m] y [o], tienen el mismo seno los arcos

$$\sphericalangle\, u, \pm\pi-u, \pm 2\pi+u, \pm 3\pi-u, \pm 4\pi+u, \pm \ldots\ldots \qquad [p]$$

En esta serie, ó en la [m], el término general de los que tienen un coeficiente par de $\pi$, es

$$t=\pm 2k\pi+u=\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\pi+u\pm 2k\pi=\tfrac{1}{2}\pi-[\tfrac{1}{2}\pi-u]\pm 2k\pi$$

y en la misma serie [p], y también en la [o], lo es para un coeficiente impar

$$t'=\pm[2k\pm 1]\pi-u=\pi-u\pm 2k\pi=\tfrac{1}{2}\pi+[\tfrac{1}{2}\pi-u]\pm 2k\pi;$$

por tanto, á úno y ótro corresponde idéntica forma si se prescinde del signo del paréntesis; luego, considerando el signo de ambos, el término general de [p], expresión de los arcos que tienen un mismo seno, será

$$T=\tfrac{1}{2}\pi\mp[\tfrac{1}{2}\pi-u]\pm 2k\pi, \qquad [q]$$

forma ya conocida [nº 27]; y se sigue, que

$$\text{sen.}u=\text{sen}[\tfrac{1}{2}\pi\mp(\tfrac{1}{2}\pi-u)\pm 2k\pi].$$

Ahora bien, si se llama $x$ el valor del seno que corresponde á un arco cualquiera representado por [q], resulta

$$\text{sen.}u=\text{sen.}\,T=\text{sen,}[\tfrac{1}{2}\pi\mp(\tfrac{1}{2}\pi-u)\pm 2k\pi]=x; \qquad (r)$$

y así,

$$u=\text{arc.sen.}x,\quad \tfrac{1}{2}\pi\mp(\tfrac{1}{2}\pi-u)\pm 2k\pi=\text{arc.sen.}x,$$

ó $$T=u=\tfrac{1}{2}\pi\mp(\tfrac{1}{2}\pi-\text{arc.sen.}x)\pm 2k\pi, \qquad (20)$$

expresión la más general de la función ciclométrica referida al seno de un arco cualquiera: en ella, como en las anteriores, escríbase $k=0, 1, 2, 3, \ldots$, según la naturaleza del arco.

Esto supuesto, si

$$T=t+v$$

es un arco cualquiera comprendido en la forma (q); y,

$$\text{sen}, t=x, \text{ ó } t=\text{arc.sen.}x,$$

$$\text{sen.}v=y, \text{ ó } v=\text{arc.sen.}y;$$

resultará

$$\text{sen. } T=\text{sen.}(t+v)=\text{sen.}t\times\cos.v+\cos.t\times\text{sen.}v$$

$$=x.\sqrt{1-y^2}+y.\sqrt{1-x^2};$$

y así

$$T=t+v=\text{arc.sen.}(x.\sqrt{1-y^2}+y.\sqrt{1-x^2}).$$

Luego, si según las (q) y [20], por $u$ se escribe $t+v$, tendremos

$$T \text{ ó } t+v=\tfrac{1}{2}\pi\mp[\tfrac{1}{2}\pi-\text{arc.sen.}(x.\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})]$$

$$\pm 2k\pi: \qquad [21]$$

tal es la expresión más general de la suma de dos arcos en términos de los senos de los mismos,

b). *Forma particular.* Si, como sucede en la trigonometría cuando se considera cualquier ángulo de un triángulo, es $T=t+v<\pi$, ó si la suma $t+v$ se halla entre $0^\circ$ y $\tfrac{1}{2}\pi$, ó entre $0^\circ$ y $\pi$; será evidentemente $k=0$ en la [21]; y se tiene entonces

$$t+v=\tfrac{1}{2}\pi\mp[\tfrac{1}{2}\pi-\text{arc.sen.}(x.\sqrt{1-y^2}+y.\sqrt{1+x^2})]. \qquad [22]$$

Mas, como siendo positivos los senos en este caso, la suma de los arcos puede no obstante hallarse entre 0° y $\frac{1}{2}\pi$ ó entre 0° y $\pi$, signos que inducen, por lo mismo, en ambigüedad, para evitarla se hace necesario considerar el doble signo de la expresión contenida dentro del paréntesis. Con este fin, en virtud del seno de los sumandos, resulta

$$\cos.[t+v]=\cos.t\times\cos.v-\text{sen}.t\times\text{sen}.v=\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}$$

$$-x.y$$

$$=\frac{1-(x^2+y^2)}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}+x.y}; \qquad (s)$$

si pues,

$$x^2+y^2<1, \text{ es } t+v<\tfrac{1}{2}\pi, \text{ porque } \cos.[t+v]=+,$$

y se tomará en la (22) el signo superior: así es

$$t+v=\text{arc.sen.}(x.\sqrt{1-y^2}+y.\sqrt{1-x^2}), \qquad (23)$$

y sólo cuando $t+v<\frac{1}{2}\pi$.

Si

$$x^2+y^2>1, \text{ es } t+v>\tfrac{1}{2}\pi, \text{ porque } \cos.(t+v)=-,$$

y se tomará en la (22) el signo inferior: así es

$$t+v=\pi-\text{arc.sen.}(x\sqrt{1-y^2}+y.\sqrt{1-x^2}), \qquad (24)$$

cuando $t+v>\frac{1}{2}\pi$.

*En resumen:* con el auxilio de la ecuación (s), las formas *(23)* y *(24)* dan los arcos sin ambigüedad: tales ecuaciones, como se sabe, pueden escribirse también de esta manera

$$\text{arc.sen.}x+\text{arc.sen.}y=\text{arc.sen.}(x.\sqrt{1-y^2}+y.\sqrt{1-x^2}),$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{cuando } x^2+y^2<1\\ \quad\text{ó}\quad t+v<\tfrac{1}{2}\pi;\end{array}\right.$$

$$\text{arc.sen.}x+\text{arc.sen.}y=\pi-\text{arc.sen.}(x.\sqrt{1-y^2}+y.\sqrt{1-x^2}),$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{cuando } x^2+y^2>1\\ \quad\text{ó}\quad t+v>\tfrac{1}{2}\pi.\end{array}\right.$$

La ciclométrica correspondiente á $(s)$, será

$$t+v=\text{arc.sen.}x+\text{arc.sen.}y=\text{arc.cos.}(\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}-xy)$$

que, por el conocido signo del coseno de un arco que está entre $0^\circ$ y $\tfrac{1}{2}\pi$, ó entre $0^\circ$ y $\pi$, no ofrece ambigüedad alguna.

*Nota.* Si en vez de la suma, se considera la diferencia de los arcos $t$ y $v$, resultará

$$t-v=\text{arc.sen.}x-\text{arc.sen.}y=\text{arc.sen.}(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$$



que no induce en ambigüedad, por cuanto

$$t-v=\pm T', \text{ según que } t\gtrless v;$$

porque, siendo $t$ y $v$ dos arcos del primer cuadrante, la diferencia, ó se encuentra en el sentido de los arcos positivos, es decir, entre $0^\circ$ y $+\tfrac{1}{2}\pi$; ó en el de los negativos, quiere decir, entre $0^\circ$ y $-\tfrac{1}{2}\pi$.

2º SUMA Y DIFERENCIA RESPECTO DE LA TANGENTE. Como para la tangente $\frac{CD}{R}$ (fig. 11) hay dos series de arcos, á saber, la formada por los que terminan en $A$ y la de aquéllos que concluyen en $D'$; y en cada una de estas series los arcos pueden tener el sentido positivo ó negativo; por razonamientos semejantes á los del caso 1º se halla, que la *primera serie* contiene los arcos

$$u, \pm 2\pi+u, \pm 4\pi+u, \pm 6\pi+u, \ldots\ldots;$$

y la *segunda*, los

$$\pm\pi+u. \pm 3\pi+u, \ \pm 5\pi+u, \ldots\ldots$$

Luego la serie de los arcos que tienen una misma tangente, se expresará por

$$u, \pm\pi+u, \pm 2\pi+u, \pm 3\pi+u, \pm 4\pi+u, \ldots, \pm k\pi+u.$$

Así es

$$T=\pm k\pi+u, \qquad (t)$$

término general de (t), la expresión de los arcos á que corresponde una misma tangente; y se signe

$$\text{tg.}u=\text{tg.}(u\pm k\pi).$$

Esto supuesto, y considerando la función ciclométrica respectiva, puede haber una forma general y ótra para un valor particular.

a) *Forma general.* Si se llama $x$ el valor de la tangente que corresponde á un arco cualquiera representado por (t), resulta

$$\text{tg.}u=\text{tg. }T=\text{tg.}(u\pm k\pi)=x; \qquad (u)$$

y así

$$u=\text{arc.tg.}x, \quad u\pm k\pi=\text{arc.tg.}x,$$

ó

$$T=u=\text{arc.tg.}x \pm k\pi, \qquad (25)$$

expresión la más general de la función ciclométrica referida á la tangente de un arco cualquiera: en ella, como en las formas anteriores, escríbase k=0, 1, 2, 3, .... según la naturaleza del arco.

Esto supuesto, si

$$T=t+v,$$

es un arco cualquiera comprendido en la forma (t); y,

$$\text{tg.}t = x, \text{ ó } t = \text{arc.tg.}x,$$
$$\text{tg.}v = y, \text{ ó } v = \text{arc.tg.}y;$$

resultará

$$\text{tg. } T = \text{tg.}(t+v) = \frac{\text{tg.}t + \text{tg. }v}{1 - \text{tg.}t.\text{tg.}v} = \frac{x+y}{1-x.y};$$

y así

$$T = t + v = \text{arc.tg.}\frac{x+y}{1-x.y}.$$

Luego, si según (11) y (25), por $u$ se escribe $t+v$, tendremos

$$T \text{ ó } t+v = \text{arc.tg.}\frac{x+y}{1-xy} \pm k\pi: \qquad (26)$$

tal es la expresión más general de la suma de dos arcos en términos de las tangentes de los mismos. La ecuación precedente se puede también escribir de este modo

$$\text{arc.tg.}x + \text{arc.tg.}y = \text{arc.tg.}\frac{x+y}{1-x.y} \pm k\pi. \qquad (27)$$

(*Continuará*)