REPUBLICA DEL ECUADOR

TOMO XVIII | Año 20.—Julio de 1903 | Nº 129

ANALES

DE LA

UNIVERSIDAD CENTRAL

TEORIA de las FUNCIONES

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

INGENIERO CIVIL Y PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

PARTE I

ANALISIS ALGEBRICA

LIBRO I

DEL LÍMITE Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CON RELACIÓN Á ÉL

Continuación de la página 200, número 128

b) *Forma particular.* Si, como sucede en la trigonometría cuando se considera cualquier ángulo de un triángulo, es $T=t+v<\pi$, ó la suma $t+v$ se halla entre 0° y $\frac{1}{2}\pi$, ó entre 0° y π; será evidentemente $k=0$ en la(27); y se tiene entonces

$$t+v=\text{arc.tg.}x+\text{arc.tg.}y=\text{arc.tg.}\frac{x+y}{1-xy},$$

ecuación que no induce en ambigüedad; porque, dependiendo el signo del denominador, será

$$t+v<\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{si} \quad xy<1,$$

y $$t+v>\tfrac{1}{2}\pi \quad ,, \quad xy>1;$$

pero, como en este último caso, la tangente es negativa: pues $\text{tg.}[\frac{1}{2}\pi+a]=\text{tg.}(\pi-b)=-\text{tg.}b$; por lo cual

$$\text{tg.}(t+v)=\text{tg.}(\tfrac{1}{2}\pi+a)=-\text{tg.}b, \text{ y } \text{tg.}b=-\text{tg}(t+v)$$

$$=-\frac{\text{tg.}t+\text{tg.}v}{1-\text{tg.}t\times\text{tg.}v}=\frac{x+y}{xy-1};$$

resulta

$$t+v \text{ ó } \text{arc.tg.}x+\text{arc.tg.}y=-\text{arc.tg.}\frac{x+y}{xy-1}. \qquad \text{(v)}$$

Y si son cualesquiera los arcos que se suman, como la expresión (t) corresponde á todos los arcos que tienen una misma tangente, positiva ó negativa; en caso de un valor negativo de esta función, será, según la (25) y (v),

$$T \text{ ó } t+v \text{ ó } \text{arc.tg.}x+\text{arc.tg.}y=-\text{arc.tg.}\frac{x+y}{xy-1}\pm k\pi, \quad (28)$$

que vale para arcos que terminan en el segundo ó cuarto cuadrante. Si pues,

$$t+v>\tfrac{1}{2}\pi, \text{ ó está el arco entre } 0^\circ \text{ y } \pi,$$

será en la (28), k=1; y resultará, considerando el sentido positivo,

$$\text{arc.tg.}x+\text{arc.tg.}y=\pi-\text{arc.tg.}\frac{x+y}{xy-1}.$$

En resumen: los arcos se obtienen sin ambigüedad mediante las ecuaciones

$$\text{arc.tg.}x+\text{arc.tg.}y=\text{arc.tg.}\frac{x+y}{1-xy}\left\{\begin{array}{l}\text{cuando } xy<1.\\ \quad\text{ó}\quad t+v<\tfrac{1}{2}\pi;\end{array}\right.$$

$$\text{arc.tg.}x+\text{arc.tg.}y=\pi-\text{arc.tg.}\frac{x+y}{xy-1}\left\{\begin{array}{l}\text{cuando } xy>1,\\ \quad\text{ó}\quad t+v>\tfrac{1}{2}\pi.\end{array}\right.$$

Nota.—Si en vez de la suma se considera la diferencia de los arcos t y v, resultará

$$t-v=\text{arc.tg.}x-\text{arc.tg.}y=\frac{x-y}{1+xy},$$

que no induce en ambigüedad, por cuanto

$$t-v=\pm T, \text{ según que } t \gtrless v;$$

porque, siendo $t<\tfrac{1}{2}\pi$, $v<\tfrac{1}{2}\pi$. la diferencia, ó se encuentra en el sentido de los arcos positivos, esto es, entre 0° y$+\tfrac{1}{2}\pi$; ó en el de los negativos, quiere decir, entre 0° y$-\tfrac{1}{2}\pi$.

EJEMPLOS

1º Demostrar que

$$\text{arc.tg.}\frac{5}{\sqrt{14}}-\text{arc.tg.}\frac{2}{\sqrt{14}}=\text{arc.tg.}\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

Lo es, porque si

$$t=\text{arc.tg.}\frac{5}{\sqrt{14}},\ \text{ó}\ \text{tg.}t=\frac{5}{\sqrt{14}},$$

y

$$v=\text{arc.tg.}\frac{2}{\sqrt{14}},\ \text{ó}\ \text{tg.}v\frac{2}{\sqrt{14}},$$

se tiene

$$\text{tg.}(t-v)=\frac{\text{tg.}t-\text{tg.}v}{1+\text{tg.}t\times\text{tg.}v}=\frac{\frac{5}{\sqrt{14}}-\frac{2}{\sqrt{14}}}{1+\frac{5}{\sqrt{14}}\frac{2}{\sqrt{14}}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{14}}}{1+\frac{10}{14}}=\frac{3\times 14}{24\times\sqrt{14}}$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{8};$$

y así

$$t-v=\text{arc.tg.}\frac{5}{\sqrt{14}}-\text{arc.tg.}\frac{2}{\sqrt{14}}=\text{arc.tg.}\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

2º Debe ser

$$y=2.\text{arc.tg.}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\text{arc.tg.}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Para esto, escríbase

$$\text{tg.}v=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ \text{ó}\ \ v=\text{arc.tg.}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ \text{ó}\ 2v=2\text{arc.tg.}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$\text{tg.}2v=\frac{2\text{tg.}v}{1-\text{tg.}^2v}=\frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1-\frac{1-x}{1+x}}=\frac{2\sqrt{(1+x)(1-x)}}{2x}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

ó

$$2v=\text{arc.tg.}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

luego

$$y=2\text{arc.tg.}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=2v=\text{arc.tg.}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \qquad (\text{w})$$

Pero esta expresión se puede simplificar más aún. En efecto, si

$$\text{sen.}\tau=x;\ \text{como}\ \ \text{tg.}\tau=\frac{\text{sen.}\tau}{\text{cos.}\tau}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

y

$$\text{cotg.}\tau=\frac{1}{\text{tg.}\tau}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

es claro, que poniendo este valor de $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ en la expresión (w), se tiene

$$y=\text{arc.tg.}(\text{cotg.}\tau),\ \text{ó}\ \ \text{tg.}y=\text{cotg.}\tau:$$

significa pues, que *y es un arco que tiene por tangente la cotangente de τ*; ó que y y τ son complementarios: así

$$y+\tau=\tfrac{1}{2}\pi;$$

por tanto

$$y=\tfrac{1}{2}\pi-v.$$

3º Hallar la expresión más simple del arco expresado por

$$y=2\,\mathrm{arc.tg.}\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Escríbase

$$\mathrm{sen.}v=x,\ \text{y así}\ \cos.v=\sqrt{1-\mathrm{sen.}^2v}=\sqrt{1-x^2};$$

luego

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{1+\cos.v}{\mathrm{sen.}v}=\frac{2\cos.^2\tfrac{1}{2}v}{2\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}v\times\cos.\tfrac{1}{2}v}=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}v}{\mathrm{sen.}\tfrac{1}{2}v}=\cot.\tfrac{1}{2}v;$$

por lo cual resulta

$$y=2\,\mathrm{arc.tg.}(\mathrm{cotg.}\tfrac{1}{2}v),\ \text{ó}\ \tfrac{1}{2}y=\mathrm{arc.tg.}(\mathrm{cotg.}\tfrac{1}{2}v):$$

así es $\frac{1}{2}y$ complementario de $\frac{1}{2}v$. Luego

$$\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}v=\tfrac{1}{2}\pi,$$

ó

$$y=\pi-v.$$

4º Demostrar que

$$y=\tfrac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc.tg.}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)=\frac{a^2}{2}\times\mathrm{arc.sen.}\frac{x}{a}.$$

Si en la 2ª de las ecuaciones (19), se escribe por x la cantidad $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, se tiene

$$\tfrac{1}{2}\pi=\mathrm{arc.tg.}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+\mathrm{arc.cotg.}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

valor que transforma el dado, en

$$y=\frac{a^2}{2}\times\text{arc.cotg.}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\frac{a^2}{2}\times\text{arc.tg.}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

porque escribiendo

$$v=\text{arc.cotg.}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},\ \text{ó cot.}v=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

resulta

$$\text{tg.}v=\frac{1}{\text{cot.}v}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};\ \text{y así } v=\text{arc.tg.}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Ahora bien,

$$\text{sen.}v=\frac{\text{tg.}v}{\sqrt{1+\text{tg.}^2v}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}}=\frac{x}{a},\ \text{ó } v=\text{arc.sen.}\frac{x}{a};$$

por tanto

$$y=\frac{a^2}{2}\times\text{arc.cot.}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\frac{a^2}{2}v=\frac{a^2}{2}\times\text{arc.sen}\frac{x}{a}.$$

$$5^\circ\quad \sphericalangle\alpha+\text{arc.tg.}\frac{a}{b}=\text{arc.tg.}\frac{\text{tg.}\alpha+\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}\times\text{tg.}\alpha}.$$

VIII

INFINITESIMAS Y METODO INFINITESIMAL

48. Objeto.—*El método infinitesimal estudia el origen y las propiedades de las funciones indefinidamente decrecientes, en cuanto son materia de la análisis.* Por tanto, debe examinarse al respecto: 1º, qué son las funciones decrecientes llamadas *infinitésimas;* 2º, cuáles sus propiedades; y 3º, la manera como se han introducido en la análisis, y lo que significan en el cálculo.

49. Definición.—Si una función decreciente, como $\frac{1}{\omega}$, toma valores cada vez más pequeños, de modo que se acerque indefinidamente á cero, sin llegar á ser nunca exactamente cero (Introd., nº 8), se convertirá en una *infinitésima* ó sea *una cantidad indefinidamente pequeña;* y de aquí la definición:

Cantidad infinitamente pequeña ó **infinitésima**, *es la que se hace menor que toda otra magnitud determinada absoluta.* Decimos, que *es la que se hace menor*, para significar que es cantidad variable decreciente: una magnitud que de otro modo llegue á ser cero no será pues, infinitésima. Añadimos, *que toda otra magnitud determinada*, porque la cantidad de que se trata, decreciendo siempre más y más, concluirá por ser menor que toda otra fija ó constante, por pequeña que se la suponga; y se le adiciona á ésta la calificación de *absoluta*; porque cualquier valor positivo, aunque sea pequeñísimo, y aun el mismo *cero*, es siempre mayor que cualquier cantidad negativa, por solo su sentido; y ahora se trata de significar una cantidad de suyo decreciente, sin consideración á ningún sentido positivo ó negativo.

La posibilidad de existencia de las infinitésimas se hace manifiesta con el ejemplo siguiente: la función $\frac{1}{\omega}$, creciendo ω indefinidamente, puede tomar los valores

$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots \frac{1}{1000000}, \ldots$ que son cada vez menores sin llegar á ser cero; mas, como el denominador puede crecer sin límites, indefinidamente puede disminuir $\frac{1}{\omega}$; por tanto, la diferencia entre un valor pequeñísimo que se asigne á este quebrado y *cero*, puede llegar á ser menor que toda cantidad determinada. Cuando se verifique esto, $\frac{1}{\omega}$ será *infinitamente pequeña* ó *infinitésima*, la que se designa con el símbolo

$$\text{lím.}\frac{1}{\omega}=0. \tag{29}$$

NOTA.—Convendremos en representar las funciones crecientes (n.os 26 y 36) por las letras últimas del alfabeto griego; y las decrecientes ó infinitésimas por las primeras del mismo; de modo que la ecuación (29) puede escribirse

$$\text{lím.}\alpha=0$$

En el sentido que estudiamos, la tendencia de las funciones decrecientes es á anularse; por esto con toda propiedad dice la ecuación puesta, que *el límite de semejantes funciones es cero.*

50. Procedencia.—Lo primero que origina la idea de las infinitésimas es la comparación entre una variable ó función cualquiera y su límite, cuya diferencia, disminuyendo con el grado de la aproximación, puede llegar á ser menor que toda cantidad determinada (nº 35, Lema). Así la diferencia entre el área de un círculo, y la de un polígono inscrito ó circunscrito á la circunferencia de aquél, es infinitamente pequeña, cuando se aumenta indefinidamente el número de lados del polígono; del mismo modo, son infinitésimas las diferencias entre el volumen de un cilindro y un prisma inscrito; y de un cono y una pirámide inscrita, cuando se consideren en el prisma y pirámide un número infinito de caras. Como en estos casos, las infinitésimas se presentan siempre que la diferencia entre una función y su límite, ya superior, ya inferior, no es una cantidad determinada.

51. Naturaleza de las infinitésimas.—La ecuación (29) no es sin embargo absoluta: en la ciencia infinitesimal se investigan tanto las cantidades finitas y determinadas, como las progresivas aproximaciones á cero de las funciones decrecientes: y como estas aproximaciones son cada vez más inmediatas, se originan varios *órdenes* de infinitésimas, denominados 1º, 2º, 3º...., *n*º; y se los representa, respectivamente, por los símbolos

$$\left(\frac{1}{\omega}\right), \left(\frac{1}{\omega}\right)^2, \left(\frac{1}{\omega}\right)^3, \ldots \left(\frac{1}{\omega}\right)^n. \qquad (30)$$

(Continuará).