# ALGEBRA

POR


LINO MAR A FLOR

Ingeniero Civil y Militar, Profesor en la Universidad Central


(*Continuación*)

40. Regla.—*Para multiplicar un monomio por ótro, se determina el signo y á la derecha de éste, se colocan, el producto de los coeficientes y todas las diferentes letras de ambos monomios; y en las letras iguales se ponen por exponentes las sumas de sus exponentes, y las desiguales entran en el producto con los suyos propios.*

Ejemplos:

$$+4a^2b^3c\times+2ab^2c^3d^2=+8a^3b^5c^4d^2;$$
$$-a^2b^2cd^3\times-3a^5bc^3df=+3a^7b^3c^4d^4f;$$
$$+2abcd\times-12a^4b^2c^3df^2=-24a^5b^3c^4d^2f^2;$$
$$-3a^2b^2c^3de^2\times+5ab^2c^2d^2ef^2=-15a^3b^4c^5d^3e^3f^2.$$

41.—*Multiplicación de un polinomio por un monomio.—Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, y dando á los productos parciales el signo correspondiente, se los suman algebraicamente.*

Sean: $(a+b-c)$ el polinomio y $m$ el monomio, y será:

$$(a+b-c)m=am+bm-cm;$$

Se demuestra: el polinomio producto, según la definición de la multiplicación, ha de tener la misma relación con el polinomio multiplicando, como la que hay entre el multiplicador con la unidad positiva.

Sí pues: $m=1+1+1+\ldots$ $m$ veces, resulta que:

$$\begin{aligned}(a+b-c)m = {} & a+b-c\\ & +a+b-c\\ & +a+b-c\\ & +\ +\ -\\ & +..+..-..\\ & +\ldots\ldots\\ & +m \text{ veces}\ldots = am+bm-cm;\end{aligned}$$

esto es, el término $+a$ se halla sumando $m$ veces, lo que es igual á $+a\ m$; el $+b$ está repetido $m$ veces, que es igual á $+b\ m$; y el término negativo, $-c$, también está sumado $m$ veces, que es igual á $-c\ m$; luego:

$$(a+b-c)\ m = am+bm-cm;$$

luego, para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

EJEMPLOS.

$$(2ab+3abc-5bd)\ 3bc^2 = 6ab^2c^2+9ab^2c^3-15b^2c^2d;$$
$$(2ab^2\times 4ab^3-3b^3cd)\times -2bc = -4ab^3c-8ab^4c+6b^4c^2d.$$

42. Cuando varios términos de un polinomio tienen un factor común, se pone este factor común, fuera de un paréntesis, y dentro de éste, la suma de los factores no comunes.

Así en el polinomio:

$$2a^2+6a^4b-8a^3b^2-10a^4bc;$$

se tiene el factor común; $2a^2$ y por consiguiente, es:

$$2a^2+6a^4b-8a^3b^2-10a^4bc=2a^2(1+3a^2b-4ab^2-5a^2bc)$$

Y en el polinomio:

$$ax^2+3bx^2-3dx^2-2abx-3a^2b^2x-x;$$

los tres primeros términos tienen el factor común $x^2$, y los tres últimos, el $x$, que se los ponen fuera de los paréntesis como sigue:

$$ax^2+3bx^2-3dx^2-2abx-3a^2b^2x-x=(a+3b-3d)x^2$$
$$-(+2ab+3a^2b^2+1)x.$$

43. *Multiplicación de un polinomio por ótro.—Para multiplicar un polinomio por ótro, se multiplica cada término del multiplicador por todos los términos del multiplicando; y, dando el signo propio á cada uno de los productos parciales, se los suman algebraicamente.*

Dem. Sean los polinomios $[a+b-c]$ y $[m+n-q]$ los que se multiplican; y también $[a+b-c]=P$; de donde, poniendo $P$ en vez del polinomio, igual, resulta:

$$[a+b-c]\ [m+n-q]=P\ [m+n-q];$$

con lo cual, tenemos la multiplicación de un monomio por un polinomio, esto es que:

$$P\ [m+n-q]=Pm+Pn-Pq;$$

y sustituyendo en el segundo miembro en vez de $P$, su valor, se tiene:

$$[a+b-c]m+(a+b-c)n-(a+b-c)q;$$

cuyos términos son también iguales al caso anterior; ó á la multiplicación de un polinomio por un monomio; y, ejecutadas las tres operaciones, resulta el siguiente polinomio:

$$am+bm-cm+an+bn-cn-aq-bq+cq;$$

que manifiesta la verdad de la regla; ó que cada término del multiplicador se multiplica por todos los términos del multiplicando, y se los suman albegraicamente.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{l}
2x^5+3x^4-6x^3-x^2+x \\
3x^3+4x^2+5x \\
\hline
6x^8+9x^7-18x^6-3x^5+3x^4 \\
\quad +8x^7+12x^6-24x^5-4x^4+4x^3 \\
\qquad +10x^6+15x^5-30x^4-5x^3+5x^2 \\
\hline
6x^8+17x^7+4x^6-12x^5-31x^4-x^3+5x^2
\end{array}$$

El primero y último términos de todo producto de polinomios ordenados según una letra, en orden ascendente ó descendente no tienen términos semejantes, y por tanto son irreducibles; como se ve en el ejemplo anterior: $6x^8$ y $5x^2$, primero y último términos son irreducibles; pues, son productos el $6x^8$ de los mayores factores con mayores exponentes que todos los demás; y el $5x^2$ el producto de los menores factores con los menores exponentes.



## SECCION 2ª

*Consecuencias y teoremas acerca de la multiplicación*

44. Ejecutadas las multiplicaciones algebraicas, según las reglas dadas, resultan algunos productos que con frecuencia los encontramos en los cálculos; y que, en ciertos casos conviene sustituir en vez del producto indicado, el ejecutado, é inversamente; y también, hablando de las potencias cuadrada y cúbica de polinomios, se ve que en sus últimas expresiones se hallan las reglas para la extracción de sus raíces.

Se tiene que:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2;$$

que, reduciendo los términos semejantes resulta:

$$[a+b]^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2;$$

que dice:

*El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual á la suma de sus cuadrados, más el doble producto de la una cantidad por la otra.*

Es:

$$[a-b]^2=[a-b][a-b]=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2;$$

esto es:

*El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual á la suma de los cuadrados de las dos cantidades dadas, menos el doble producto de la una por la otra.*

Es también:

$$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac$$
$$+bc+c^2=a^2+2ab+2ac+2bc+b^2+c^2;$$

es decir:

*El cuadrado de la suma de tres números es igual á la suma de los cuadrados de todos sus términos, más el doble producto del primero por el segundo, más el doble del mismo primero por el tercero y más el doble producto del segundo por el tercero.*

45. Ahora:

$$[a+b]^3=[a+b]^2[a+b]=[a^2+2ab+b^2][a+b]=a^3+2a^2b$$
$$+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

que dice:

*El cúbo de la suma de dós cantidades es igual á la suma de los cubos de las dos cantidades, más el triplo del cuadrado de la primera por la segunda cantidad, y más, el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda cantidad.*

También es:

$$(a-b)^3=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b$$
$$+2ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$

que quiere decir:

*El cubo de la diferencia de dos cantidades, iguales al cubo de la primera cantidad, menos el triplo del cuadrado de ésta por la otra cantidad, más el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, y menos el cubo de esta misma.*

Estas reglas valen para las sumas, y diferencias de las potencias sucesivas, como en:

$$(a+b)^4=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b]=a^4+3a^3b+3a^2b^2$$
$$+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$



y finalmente tenemos:

46. *La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, da por producto la diferencia de sus cuadrados.*

como se ve:

$$[a+b][a-b]=a^2+ab-ab+b^2=a^2-b^2.$$

47. Se ordenan los polinomios multiplicando y multiplicador según las potencias crecientes ó decrecientes de una misma letra, llamada **ordenatriz**; y se multiplica cada término del multiplicador por todos los términos del multiplicando, y colocando de izquierda á derecha los productos parciales en líneas horizontales, de modo que los términos semejantes caigan unos debajo de ótros, se los reduce para obtener el producto en sus términos propios.

## Ejemplos:

Sean: $2x^4-3x^3-4x^2+x$;

el polinomio multiplicando, ordenado con relación á la letra $x$, en orden descendeste; y:

$$x^3-2x^2+3x;$$

el polinomio multiplicador, ordenado también con relación á la letra $x$ y en orden descendente.

1º

$$\begin{array}{rrrrrr}
2x^4 & -3x^3 & -4x^2 & +x & & \\
 & x^3 & -2x^2 & +3x & & \\
\hline
2x^7 & -3x^6 & -4x^5 & +x^4 & & \\
 & -4x^6 & +6x^5 & +8x^4 & -2x^3 & \\
 & & +6x^5 & -9x^4 & -12x^3 & +3x^2 \\
\hline
2x^7 & -7x^6 & +8x^5 & & -14x^3 & +3x^2
\end{array}$$

2º

$$\begin{array}{l}
2a^2x^2-3ax^3-a^4+2x^4 \\
3a^3x^2-5a^2x^3+x^5 \\
\hline
6a^5x^4-9a^4x^5-3a^7x^2+6a^3x^6 \\
\quad -10a^4x^5 \qquad +15a^3x^6+5a^6x^3-10a^2x^7 \\
\quad -a^4x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad 2a^2x^7-3ax^8+2x^9 \\
\hline
6a^5x^4-20a^4x^5-3a^7x^2+21a^3x^6+5a^6x^3-8a^2x^7-3ax^8+2x^9
\end{array}$$

48. Se dice que dos polinomios son homogéneos, cuando la suma de los exponentes en cada término es constante.

Los dos polinomios del segundo ejemplo son homogéneos; en el multiplicando la suma de los exponentes de cada término es cuatro y en el multiplicador cinco; pero como para multiplicar dos cantidades de igual base, se suman los exponentes, el polinomio producto es homogéneo y de un grado igual á la suma de los grados de los factores; como se ve, el polinomio producto es del grado noveno; y además, el primor término y último no tienen términos semejantes.

49. TEOREMA.—*Un producto no varía de valor, alterando el orden de los factores.*

Sean en primer lugar, para comprender mejor, los números:

$$3\times4=4\times3;$$

y, se dice que no altera el valor, multiplicando tres por cuatro ó multiplicando cuatro por tres.

Descomponiendo estos factores en sus unidades, se tiene el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{r|l} 3\times4=1+1+1 & =3 \\ +1+1+1 & =3 \\ +1+1+1 & =3 \\ +1+1+1 & =3 \\ \hline +4+4+4 & =4\times3 \end{array}$$

en donde se ve, claramente, que sumadas las columnas verticales dan $4+4+4$; esto es, el número cuatro está repetido tres veces como sumando, ó lo que es igual cuatro por tres; así mismo, las unidades colocadas en líneas horizontales dan tres, que sumándolas, se repiten, $3+3+3+3$, cuatro veces por sumando, ó sea: $3\times4$; pero en úno y otro caso hay el mismo número de unidades; luego no se altera el producto variando el orden de los factores; luego, $3.4=4.3$.

50. Ahora razonando con cantidades generales y enteras, se tiene:

1º Sean dos factores $a$ y $b$ en donde $b$ es multiplicador, y por ello es: $ab=a+a+a+\ldots\ldots b$ veces, y descomponiendo cada término $a$ del segundo miembro, en sus unidades simples, tenemos:

$$\begin{array}{l} ab=1+1+1+\ldots\ldots a \text{ veces} \\ \quad\;\; +1+1+1+\ldots\ldots a \text{ veces} \\ \quad\;\; +1+1+1+\ldots\ldots a \text{ veces} \\ \quad\;\; +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+b \text{ veces } \ldots\ldots\ldots = b.a.$$

Pero como la suma de las unidades de cada columna vertical es $b$, y están repetidas $a$ veces, se tiene $b \times a$; y las unidades de $a$ en las líneas horizontales representan $a+a+a+a+\ldots\ldots$ $b$ veces, ó la suma de $a$, $b$ veces, ó lo que es igual $a\ b$; luego, alterando el orden de los factores que no se altera el producto; porque en el úno y en el otro sentido hay el mismo número de unidades.

2º Si son tres los factores $a.b.c$.

Se tiene $a.b.c=a.c.b$.

Pues es: $a.b.c=ab+ab+ab+\ldots\ldots$ $c$ veces, siendo $c$ el multiplicador y descomponiendo el segundo miembro, se tiene:

$$\begin{aligned} a.b.c = & a+a+a+\ldots\ldots b \text{ veces} \\ & +a+a+a+\ldots\ldots b \text{ veces} \\ & +a+a+a+\ldots\ldots b \text{ veces} \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +c \ldots\ldots \text{ veces} = a.c.b; \end{aligned}$$

pero, las columnas verticales de $a$ se repiten como sumando, $c$ veces, lo que es igual á $a\ c$; este factor $a$, en líneas horizontales está sumado, $b$ veces; que da igual $a.c.b$; luego, $a.b.c=a.c.b$.

Lo mismo se demuestra si son cuatro, cinco ó más factores.

3º Si los factores son fraccionarios:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f};$$

se dice que es igual:

$$\frac{a.c.e}{b.d.f} = \frac{a.e.c}{d.b.f}.$$

Una vez que para multiplicar quebrados se multiplican entre sí los numeradores y entre sí los denominadores; y como todos éstos son números enteros, resulta que el producto de cada uno de ellos no se altera de valor, alterando el orden de colocación de sus factores.

Corolario.—Un producto queda multiplicado por un número, multiplicando el número por uno de los factores, y éste producto por lo demás, porque si $a.b.c$ se quiere multiplicar por $d$, se tiene:

$$a.b.c \times d = ab \times dc$$

se deduce del teorema; puesto que el cambio de orden de los factores no altera el producto.

51. Teorema.— *Toda cantidad multiplicada por cero, da por producto cero.*

Antes de demostrar este teorema, veamos cómo resulta cero en los cálculos:

1º Proviene cero de una diferencia, en la que el sustraendo es igual al minuendo;

pues: $$a - a = 0;$$



2º Resulta cero del resto de una división exacta; y se toma también como *cero*, el límite del cociente que por división va tomando valores cada vez menores sin que se pueda hallar cociente completo; y,

3º Se concibe que un número puede tener valores menores, sucesivamente, y que cada vez sea menor que toda cantidad imaginable; en tal caso, también se toma como su límite *cero*; esto es, se hace cero una cantidad, infinitamente, pequeña, cuando se quiere que no exista en los cálculos

Sabidos estos principios demostremos el teorema:

$$a.0 = 0$$

pues, poniendo en esta ecuación, en vez de cero, su igual $(b - b)$, se tiene:

$$a(b-b)=ab-ab=o;$$

luego, $$a\times o=o.$$

También si recordamos la definición de la multiplicación, se tiene:

$o\times a=o$; porque si $a$ multiplicador es:

$$a=1+1+1+; \ldots\ldots a \text{ veces};$$

hay que tomar á cero por sumando tantas veces como unidades tiene $a$, es decir:

$$o\times a=o+o+o+\ldots\ldots a \text{ veces}=o;$$

porque, cero en nada aumenta ni disminuye sumándose entre sí ó restándose de sí mismo ó de cualquier cantidad; luego, cero multiplicado por toda cantidad es igual á cero.



# CAPITULO IV

## DIVISIÓN, SUS CASOS, TEOREMAS, MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

## SECCION 1ª

### *División algebraica y sus casos*

52. La *división algebraica* es una operación inversa de la multiplicación; *y tiene por objeto hallar una expresión algebraica, llamada cociente, que multiplicada por el divisor produzca el dividendo.*

De manera que esta operación se reduce á dado el producto y uno de sus factores, encontrar el otro factor;

y hablando del signo, se deduce también que si llamamos dividendo al producto, divisor al factor dado, y cociente al otro factor que se busca, según la definición dada acerca de la división, tiene que verificarse, lo siguiente:

$\frac{+}{+}=+$; porque, el cociente multiplicado por el divisor es igual al dividendo; ó sea como en la multiplicación: $+\times+=+$;

$\frac{-}{-}=+$; porque, más cociente por menos divisor, es igual á menos dividendo; ó, $+\times-=-$;

$\frac{+}{-}=-$; porque, $-\times-=+$;

y $\frac{-}{+}=-$; porque, $-\times+=-$.

53. *En donde se observa que signos iguales de dividendo y divisor, producen signos positivos para los cocientes; y signos desiguales de los mismos dan signos negativos á los cocientes.*

Sea dividir $+a^m$ por $+a^n$;

se tiene $$\frac{+a^m}{+a^n}=+a^{m-n}.$$

en donde $a^{m-n}$ es el cociente; porque multiplicado por el divisor $a^n$, es: $a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}=a^m$, produce el dividendo $a^m$, reduciendo los términos semejantes del exponente del producto indicado.

54. En la división hay que observar: 1º, que si dividendo y divisor son números concretos ó tienen una denominación; el cociente es un número *abstracto*; porque en este caso la división es una medida: pues dividir 100 metros de un género cualquiera en pedazos de á 5 metros, es averiguar cuántas veces el número 5 está contenido en el 100; y el cociente ó respuesta es 20, ó sea un número abstracto; 2º, si el dividendo es concreto y el divisor abstracto; el cociente tiene la denominación del dividendo; porque viene á ser parte de él: así divi-

dir 100 sucres para 5, es buscar la quinta parte de 100; que es 20 sucres, de la misma naturaleza del dividendo; y 3º, si dividendo y divisor no son números concretos; el cociente tampoco es concreto.

Antes de dividir un monomio por ótro, se debe saber el:

55. TEOREMA.—*Para dividir potencias de igual base, se resta el exponente menor del mayor, y el resto se pone de exponente de la base común en el dividendo ó divisor, en el que tenga el exponente mayor.*

Para comprender mejor este teorema, sean números los exponentes, y dividamos.

$a^6$ por $a^2$; y tendremos:

$$\frac{a^6}{a^2}=\frac{a.a.a.a.a.a}{a.a}=a.a.a.a=a^{6-2}=a^4;$$

que resulta en el caso de ser el exponente del dividendo mayor que el del divisor; porque los dos factores de $a$ del divisor anulan dos del dividendo y quedan cuatro, ó, sea: $a^{6-2}=a^4$.

En el caso contrario, dos factores de $a$ del dividendo se quitan por dos del divisor, y resulta:

$$\frac{a^2}{a^6}=\frac{a.a}{a.a.a.a.a.a}=\frac{1}{a.a.a.a}=\frac{1}{a^{6-2}}=\frac{1}{a^4}$$

Generalizados los dos casos anteriores se tiene:

1º $$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}, \text{ para el caso de ser } m>n;$$

porque; $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a.a.a.a.a\ldots\ldots m \text{ veces}}{a.a.a\ldots\ldots n \text{ veces}}=a^{m-n};$$

pues, $n$ factores del divisor se quitan por $n$ factores del dividendo, en el cual debe quedar por exponente el resto ó sea $m-n$ factores; y, 2º $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$, esto es, en el caso de ser $n > m$: porque es:

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a.a.a.\ldots\ldots m \text{ veces}}{a.a.a.a.a.\ldots\ldots n \text{ veces}}=\frac{1}{a^{n-m}};$$

puesto que, $m$ factores del dividendo se quitan por $m$ factores del divisor, en el que quedará $a^{n-m}$, por ser $n > m$; y por dividendo se pone el coeficiente *úno* de la potencia menor, una vez que el divisor $a^{n-m}$, no puede quedar sino de tal divisor; luego, para dividir potencias de igual base, se resta el exponente menor del mayor, y el resto se pone por exponente de la base mayor ya sea en el dividendo ya en el divisor.

56. Ahora pues, sabemos que: $\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}$;

pero como $m-m=0$; resulta que: $\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0$; haciendo con esta potencia, inversas operaciones, se tiene:

$$a^0=a^{m-m}=\frac{a^m}{a^m}=1;$$

porque toda cantidad dividida por si misma da por cociente la unidad; y de donde, resulta que toda cantidad *elevada á cero es igual á la unidad.* Esta potencia con exponente cero sirve para que aparezca, en un cálculo, el factor literal que se ha reducido á la unidad.

Se quiere dividir $\frac{a^m}{a^{m+s}}$ y como $m+s > m$ se tiene:

$$\frac{a^m}{a^{m+s}}=\frac{1}{a^{m+s-m}}=\frac{1}{a^s};$$

y, ejecutando la operación de este mismo cociente indicado $\frac{a^m}{a^{m+s}}$, siguiendo sólo la regla de restar el exponente del divisor del exponente del dividendo, caso de una mera observación, su resultado es un símbolo de una potencia con exponente negativo, que es aceptada en álgebra:

y se tiene: $$\frac{a^m}{a^{m+s}}=a^{m-m-s}=a^{-s};$$

de donde se ve que los dos últimos miembros de esta igualdad y la anterior, son iguales:

y es: $$a^{-s}=\frac{1}{a^s}$$

que quiere decir: *toda cantidad con exponente negativo es igual á la unidad dividida por la misma potencia con exponente positivo.*

De lo expuesto anteriormente, se deduce la regla.

57. *Para dividir un monomio por ótro, se determina el signo del cociente y se divide el coeficiente del dividendo por el del divisor; y restando los exponentes de las letras iguales se ponen los restos en las letras que tienen mayores exponentes ya sean del dividendo. ya del divisor, y las letras desiguales quedan en el cociente con sus mismos exponentes.*

Pues según esta regla, el cociente multiplicado por el divisor es igual al dividendo.

EJEMPLOS:

$$18a^4b^3c : 3a^2b = +6a^2b^2c; \quad -30a^6b^2c : -6a^3bc = +5a^3bc;$$

$$+14a^3bc^2 : -5a^2b^2c^3d^2 = \frac{-14a}{+5bcd^2}; -\frac{a^3b^2c^4}{+3abcd^2} = -\frac{a^2bc^3}{3d^2}.$$

Para que un cociente sea entero es necesario que la división de los coeficientes sea exacta, y que de los exponentes de las letras iguales, los del dividendo sean mayores que los de las letras correspondientes del divisor.

Esto se observa en los dos primeros ejemplos.

Mas cuando, la división de los coeficientes no es exacta y algunos exponentes de las letras del divisor son mayores, que los de las letras del dividendo, los cocientes son fraccionarios, como se ve en el tercer y cuarto ejemplos.

Ahora si tenemos la fracción:

$$\frac{12a^5 b^3 c^2 d^2}{16a^3 b^2 cd} = \frac{3}{4} a^2 bcd;$$

en donde, la división de los coeficientes no es exacta; pero los exponentes de las letras iguales del dividendo son mayores que los de los del divisor; entonces se tiene una expresión algebraica entera con coeficiente fraccionario.

Si ni la división de los coeficientes es exacta, ni los exponentes de las letras iguales del dividendo son mayores que los exponentes de las letras correspondientes del divisor, se simplifica ó más bien se reduce á su más simple expresión; y el cociente entonces es fraccionario.

EJEMPLO:

$$\frac{20a^5 b^3 c^2 de^2}{25a^4 b^2 c^3 e^4} = \frac{4abd}{5ce^2}$$

58. Ahora pues, demostremos generalmente la división algebraica; y para esto representemos por $M$ al monomio ó polinomio dividendo, por $S$ al polinomio ó monomio divisor; por $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots c_n$, los cocientes; y por $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots r_n$ los residuos sucesivos ó dividendos parciales.

Se tendrá, en todo caso:

$$\frac{M}{S} = c_1 + \frac{r_1}{S};\ \frac{r_1}{S} = c^2 + \frac{r_2}{S};\ \frac{r_2}{S} = c_3 + \frac{r_3}{S} + \ldots\ldots c_n + \frac{r_n}{S};$$

en donde, poniendo el valor $\frac{r_1}{S}$ en la primera división; después el valor $\frac{r_2}{S}$; y en seguida los demás valores hasta $c_n$, se tiene:

$$\frac{M}{S}=c_1+c_2+c_3+\ldots\ldots c_n+\frac{r_n}{S}; \qquad [1]$$

Y, puesto que, para encontrar los residuos sucesivos, se multiplican los cocientes parciales por el divisor, y estos productos se restan del dividendo $M$, y de los demás dividendos parciales ó residuos $r_1$, $r_2$, $r_3 \ldots\ldots r_n$, el primer residuo $r_1$

es: $r_1=M-S\,c_1$
el segundo $r_2=r_1-S\,c_2$
el tercero $r_3=r_2-S\,c_3$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . $r_{n-1}=r_{n-2}-Sc_{n-1}$
y el último $r_n=r_{n-1}-Sc_n$

sumando estas ecuaciones, se tiene:

$$r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{n-1}+r_n=M+r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{n-2}$$
$$+r_{n-1}-S[c_1+c_2+c_3+\ldots\ldots+c_n];$$

y, restando la suma de los residuos ó dividendos parciales de entrambos miembros, resulta:

$$r_n=M-S\,[c_1+c_2+c_3+\ldots\ldots c_n]; \qquad (2)$$

que manifiesta la forma que tiene un residuo general en la división sucesiva.

*(Continuará).*