LOS INCONMENSURABLES

EN LA

GEOMETRIA

POR

J. ALEJANDRINO VELASCO

Ingeniero Civil y Profesor de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central del Ecuador

DOS PALABRAS

HACE algunos años, cuando yo era todavía discípulo de la Escuela Politécnica dirigida por los sabios PP. Alemanes de la Compañía de Jesús, murió en el lugar un señor reputado por gran matemático: no pude saber cuánta sería su ciencia, pero es verdad que en su biblioteca se encontraron muchas obras de matemáticas, escritas en diferentes idiomas y pedidas, seguramente, á Europa: hablando de uno de estos libros me decía, con mucha gracia, uno de esos profesores: "Hay cosas que ya es muy difícil encontrarlas en Europa, y aquí se las halla fácilmente." Pues entre esos libros yo también encontré uno con el título "THÉORIE DES INCOMMENSURABLES, *ou Moyen de calculer les nombres sourdes, et de mesurer* *les surfaces irrationneles.*—Ouvrage *utile à tous ceux qui veulent se mettre à l'abri des erreurs qui se sont introduites dans la Géométrie de l'infini.*

Archimède le chercha,
Archiange le trouva."

Al pronto me llamó la atención el título del libro, y lo compré; leyéndolo después, encontré que era, ciertamente, digno de un profundo estudio; y aun cuando entonces ni posteriormente, ejerciendo ya el profesorado, no pude hacer ningún desarrollo de esas teorías, porque tenía otros fines con ellas; ahora, que vuelvo á regentar una cátedra de matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, me propongo traducir libre, pero metódicamente, algunas partes de la obra: está escrita de una manera que cansa la lectura; pues que en la exposición, y en los mismos renglones, se introducen fórmulas, reglas, números, teoremas, etc., etc., todo sin separación ni distinción, que es lo elegante en el sistema de escritura moderno; pero venciendo la repugnancia ó fastidio que se siente al pasar la vista por tal acopio de cosas expuestas, frecuentemente, en largos ó dilatados trozos, que forman páginas enteras; y procurando penetrar en la sustancia, se nota luego la sencillez, profundidad, acierto y utilidad del estudio del libro: con una sagacidad envidiable, como no se acostumbra en los tiempos modernos, el autor, cuyo nombre por desgracia no se indica, demuestra, metiendo, como se dice, por los ojos, la verdad del teorema de Pitágoras, suponiendo, al efecto, un triángulo isósceles rectángulo; y, sin más que completar el cuadrado y fijarse en el exceso de la diagonal (la hipotenusa) sobre el lado (el cateto), desarrolla con facilidad y prontitud las ecuaciones que dan los elementos de los polígonos regulares, octógonos y cuadrados circunscritos é inscritos, exígono y dodecágono, la cuadratura del círculo etc., etc.; y deduce consecuencias que extrañan mucho en las *ciencias que sobresalen por la exactitud de sus principios y rigorismo de su método.*

COMO estas teorías, *nuevas*, aunque *viejas*, como lo es la *verdad: nuevas*, porque en las obras del día ni siquiera se las menciona, ó es raro el hacerlo; y *viejas*, porque el libro fué impreso el año de 1788; como estas teorías, digo, pueden contribuir de algún modo al progreso de la ciencia, me propongo hacer la traducción indicada para insertarla en los "Anales de la Universidad": juzgo que con la lectura pueden aprovechar mucho los alumnos de la Facultad de Ciencias y los que gusten de profundizar las leyes de las *Ciencias de la Cantidad y la Extensión.*

DOY á las cuestiones que me propongo publicar el título que se lee al principio; y comienzo el Tratado poniendo, á manera de *introducción*, la conferencia con la que abrí, en este año, el curso de Geometría Elemental, clase en que procedo á manera de ampliación, como preparación útil para dictar en los años subsiguientes, las varias ramas de la *Geometría Superior.*

YO, por razón de la afinidad, introduciré de cuando en cuando y de mi cuenta, una que otra cuestión relacionada con las que trata el autor: en este sentido puedo decir que mi trabajo será algo como una *refundición.*

INTRODUCCION

1. OBJETO DE LA GEOMETRIA.—Esta disciplina—de las voces griegas *γή*, tierra; y *μέτρον*, medida—á pesar de tener, por la etimología, una significación muy limitada, la *medida de la tierra*, es, no obstante, la *ciencia general de la extensión* y una de las dos ramas fundamentales de las Matemáticas Puras.

2. RESEÑA HISTORICA.—Es posible que el principio de la Geometría se lo encuentre en el origen de las sociedades humanas; y que, desde la más remota antigüedad, los hombres hayan conocido algunas verdades matemáticas, producto necesario del desarrollo primitivo; pero estas verdades, fuera de haber sido en un pequeño número, se han de haber limitado á las necesidades ó cuidados particulares de los individuos, como la medida y división de la propiedad, los límites de las heredades, la figura y dimensión de los materiales apropiados á las construcciones, etc., etc.: tales debieron ser, á no dudarlo, las causas ú orígenes de esas verdades ó principios; y aunque, durante una larga serie de siglos, se ha preciado el Egipto de mostrársenos como la cuna de la Geometría (1), no pudo, sinembargo, elevarse sobre las consideraciones *concretas ó limitadas* de la extensión: con Tales, de Mileto, y Pitágoras, de Samos, es que comienzan

(1) Se asegura que, como á consecuencia de las inundaciones del Nilo, desaparecían las señales con que los propietarios ribereños demarcaban las partes que les correspondían, para evitar los reclamos y disgustos que se suscitaban al restablecer esas señales, fué que se pensó en fijar por alguna medida la propiedad de cada uno: de aquí el origen de la *geometría;* y su cuna, el *Egipto,* desde la más remota antigüedad.

las *especulaciones abstractas* de las verdades geométricas, esto es, la *Ciencia;* y tanto en este concepto, como en otros muchos, la Grecia hay que considerarla á la cabeza de las naciones entonces civilizadas.

Después de Pitágoras, el inventor del teorema acerca de los cuadrados de la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, una de las proposiciones elementales más importantes de las Matemáticas, los filósofos griegos se entregaron con ardor al estudio de la geometría: Anaxágoras de Clazomene, perseguido por haber enseñado que los astros eran cuerpos materiales; Hipócrates de Quío, conocido por su famoso teorema de la cuadratura de las *lúnulas;* Platón, denominado el *divino,* que llamaba á Dios el *Eterno Geómetra;* y, sobre todo, Arquimedes de quien se ha escrito, que "....su solo nombre bastaría para hacer inmortal la sabiduría griega, cuando no tuviera otros matemáticos de que gloriarse"; deben ser citados entre los que contribuyeron al progreso de la ciencia, infatigables pensadores cuyos descubrimientos, excepto los de Arquimedes, que fué posterior, recopiló después Euclides en su célebre obra de los *Elementos.*

Sinembargo, y á pesar de los inmensos trabajos de estos hombres ilustres, la ciencia permanecía en el círculo limitado de *proposiciones particulares;* y sólo más tarde, en la época del renacimiento de las letras, cuando la Europa salió de esa larga barbarie que se siguió á la destrucción del Imperio Romano, fué que se principió á traducir y comentar las obras de los antiguos, sin que por esto se pueda señalar una éra de verdadero progreso, anterior á la época de Descartes: con él la geometría comenzó la nueva carrera que ha recorrido después, de una manera tan brillante. La Geometría que publicó Descartes en 1637 y, cuarenta años más tarde, el cálculo diferencial, inventado por Leibnitz y Newton, han llevado la ciencia del geómetra al más alto grado de perfección, haciéndola definitivamente pasar á las *consideraciones generales ó universales,* de las puramente *particulares ó concretas.*

Esto supuesto, mientras Descartes, por la *aplicación del álgebra á la geometría*, creaba una de las ramas la más elevada de la geometría general, otros matemáticos descubrían nuevos caminos: Cavalieri, con su *método de los indivisibles;* Fermat y Barrow, con los suyos *de las tangentes*, prepararon los descubrimientos de Newton; al mismo tiempo que Désargues y Pascal, con *sus consideraciones acerca de las proyecciones y transversales*, arrojaron el germen de la *Geometría Descriptiva*, de esta geometría cuyo completo desarrollo es debido totalmente á Monge en los tiempos modernos. Así es como ha principiado el nuevo período de la ciencia; y desde entonces no se trata, como se había hecho antes, de considerar los números y las figuras no más que bajo el aspecto de sus *relaciones:* la *construcción* ó *generación* de las magnitudes, tanto numéricas, como geométricas, ha sido el objeto superior de los geómetras de esa éra brillante que, comenzando en el siglo XVII, se extiende hasta nuestros días.

Al presente bien se puede afirmar que todos los ramos de la *Ciencia de la Extensión* están definitivamente constituídos; y, por haber sido el objeto de tan numerosas investigaciones, han adquirido tal grado de desarrollo, que es hoy muy difícil saberlos en su conjunto y percibir su ligazón. Pero esta unidad de principio, último objeto de la razón, vanamente se busca en las disquisiciones de los geómetras, porque no es del dominio de su ciencia: es la *Filosofía* solamente la que puede investigar las leyes de las realidades materiales, simples é intelectuales: á ella, la *ciencia de las ciencias humanas*, es que hay que recurrir para fundar las Matemáticas sobre bases estables y absolutas.

3. **DIVISION DE LA GEOMETRIA.**—El objeto de esta ciencia se lo puede exponer de dos maneras: la una, muy general, por los modos del procedimiento; la ótra, más determinada é inteligible, por la naturaleza misma de la investigación:

1º **Modos de procedimiento.**—La Geometría, en el sentido más lato, y como ya se ha dicho, *es la ciencia general* *de la extensión, estudiando sus leyes de generación y comparación.* Se divide en dos ramas principales: la una, mediante *modos distintos é independientes,* ó sean *individuales ó particulares,* trata de la generación y comparación de la extensión; la ótra, de esta misma generación y comparación mediante *modos universales,*

I. Los modos individuales ó particulares acerca de la generación y comparación de la extensión, caracterizan la parte de la ciencia designada con el nombre de *Geometría Elemental:* es propiamente la geometría de los antiguos; y el procedimiento se lo puede resumir en pocas palabras:

Los elementos de toda generación primitiva de la extensión son las *líneas:* el primer modo de generación elemental primitivo es la *línea recta;* el último, la *línea curva;* y la transición entre estos dos modos es el *ángulo.* Si se combinan los modos primitivos elementales, se obtiene la generación elemental derivada, la *superficie;* y por la reunión sistemática de estas diversas generaciones, el *sólido* ó *cuerpo geométrico:* líneas, superficies y sólidos, tales son los objetos de la geometría elemental; y, por consiguiente, de la geometría en general considerada.

II. Los modos universales acerca de la generación y comparación de la extensión constituyen la *Geometría Superior,* que se divide en varias ramas, á saber:

Geometría de las Transversales: generación primitiva universal *por intersecciones:*

Geometría Descriptiva: generación sistemática universal mediante *proyecciones:*

Geometría Analítica: generación sistemática universal mediante la *aplicación del álgebra á la geometría:* y por medio de *coordenadas.*

La *comparación* de las figuras geométricas, bajo el punto de vista de la *universalidad,* determina los altos fines que se propone la Geometría en sus varias ramas, cuya ligazón se la comprenderá mejor con el siguiente

CUADRO SINOPTICO

Geometría General: estudio de las leyes generales de la extensión.

- Modos distintos é independientes, ó sean individuales ó particulares acerca de la generación y comparación de la extensión: *Geometría Elemental.*
- Modos universales acerca de la generación y comparación de la extensión: *Geometría Superior.*
  - Modos geométricos ó primitivos.
    - Parte elemental: *Intersecciones: Geometría de las Transversales.*
    - Parte sistemática: *Proyecciones: Geometría Descriptiva.*
  - Modos algébricos ó derivados.
    - Parte elemental: *Aplicación del álgebra á la geometría. Lugares.*
    - Parte sistemática: *Coordenadas: Geometría Analítica.*
      - Geometría de Descartes ó Cartesiana.
      - Geometría de Chasles ó Moderna.

2º **Naturaleza misma de la investigación.**—Conocidos, por lo 1º, I, los objetos, materia de la disciplina, se puede dar, como más comprensiva, la siguiente

Definición. **Geometría** *es la ciencia, ó parte de las Matemáticas, que estudia las propiedades de las líneas, superficies y sólidos ó cuerpos geométricos, ó sea de las figuras; y la medida de su extensión.*

Pero, para cumplir con este fin, las propiedades de las figuras se las ha considerado de diferentes maneras, y se han aplicado, según los casos, métodos especiales, de donde proviene la

División de la Geometría. Es la más natural en *elemental y superior:*

Trata la **Geometría Elemental** *de aquellas propiedades de las figuras que, por decirlo así, se descubren á la simple inspección, ó se obtienen como consecuencia inmediata de sus formas.* Se ocupa la **Geometría Superior** *de las propiedades que se las puede denominar más ó menos remotas, por fundarse en las primeras; y de las que resultan al relacionar las figuras entre sí, en los muchos casos en que esto se quiere ó se hace necesario.* Esta rama de la Geometría general, considerando las partes de más importancia, se subdivide en *descriptiva, analítica ó cartesiana y moderna ó superior*, propiamente dicha.

La *primera* investiga las propiedades de las figuras, procediendo esencialmente por representación gráfica: de ella se puede afirmar que el cálculo ó modo algébrico no existe del todo ó que es apenas ocasional; por esto se la define diciendo:

Geometría Descriptiva *es la parte de la Geometría Superior que se propone dar reglas fáciles y determinadas para representar figuras cualesquiera sobre un plano; y deducir de la representación la verdadera forma, dimensiones y posición de la figura de que se trata.*

La *segunda* investiga las mismas propiedades aplicando, como medio adecuado, el cálculo algébrico: en esta parte no es esencial la representación gráfica; y sólo se emplean los dibujos para facilitar la inteligencia de las cuestiones. Así

Geometría Analítica *es la parte de la Geometría Superior que estudia las propiedades de las figuras, representándolas por medio de ecuaciones.*

Como la extensión, ó partes determinadas de ella, que son las figuras, pueden considerarse en el plano ó en el espacio, á saber: ciertas líneas ó figuras que tienen todos sus puntos en un plano; y ótras que se dice los tienen en el espacio, por no poderse contener todos en un plano; la *geometría elemental y la analítica* se dividen, además, en *plana y del espacio:*

La *geometría elemental plana* estudia las figuras situadas en un plano; la *del espacio*, las que tienen sus puntos en el espacio. La *analítica plana*, trata de las líneas del plano, representadas por medio de ecuaciones; la *del espacio*, de las superficies en general, de igual manera representadas.

En los tiempos modernos se ha extendido más aún esta parte importantísima de la Geometría, extensión que ha dado origen á un nuevo Tratado que se lo designa con el nombre de *Geometría Analítica Moderna* ó *Superior*, propiamente dicha, según lo que ya se ha insinuado; y para distinguirla de ésta, la anterior se caracteriza con el epíteto de *cartesiana*, de Descartes, su inventor. La *moderna* se llama también *Geometría de Chasles*, porque á este geómetra es debido principalmente el desarrollo: tal geometría, fundada en las relaciones métricas y de posición de las figuras, establece métodos generales que abrevian los cálculos de la cartesiana; y resuelve problemas que no están al alcance de ésta; por eso es que la Geometría de Chasles se la llama también *Geometría de posición*.

I

TEOREMA DE PITAGORAS.

CONSECUENCIAS

4. DIVISION DEL NUMERO.—Se sabe que NÚMERO *es el resultado de la comparación de la magnitud ó cantidad con la unidad que se elige para medirla;* ó, con menos palabras: *es la expresión de la magnitud ya comparada.*

Si se prescinde de la consideración de ser el número *simple* ó *dígito* [de *digĭtus*, dedo] y *compuesto*, la división más natural es en dos clases: *objetiva*, la una; *subjetiva*, la ótra. La *división objetiva* se refiere á la unidad; pues que por ésta, el número puede ser: *entero*, si sólo consta de unidades; *quebrado*, si de partes de la unidad; y *mixto*, si de unidades y partes de la unidad. El número es también *conmensurable si, por contener justamente la magnitud á la unidad, sus partes ó una y ótras, resulta dado, como expresión de la comparación, en enteros ó quebrados ó mixtos;* y como que, en este caso, la magnitud y la unidad tienen una razón determinada, que se la puede expresar en términos de la unidad ó partes de ella, se llama también el resultado de la comparación, *cantidad* ó *número racional.* Por contraposición, *números incomensurables, cantidades irracionales* son las expresiones que no tienen los caracteres indicados.

Por lo expuesto es que se dicen *números conmensurables*, en general, los que tienen una medida ó razón común; *inconmensurables*, si caracen de esta medida ó razón.

Por la *división subjetiva*, ó sea con relación á la idea que los números desarrollan en el espíritu, pueden ser: *abstractos y concretos:* éstos, homónimos, *homogéneos* ó *complejos, heterogéneos* ó *incomplejos.*

5. NUMEROS INCONMENSURABLES.—Se ha dicho que estos números no tienen los caracteres de los *conmensurables* y *racionales*. Así: *son números inconmensurables los que, por no contener justamente la magnitud á la unidad, sus partes ó una y ótras, no pueden darse, como expresión de la comparación, ni por enteros, ni quebrados, ni mixtos;* y como que, en este caso, la magnitud y la unidad carecen de una razón determinada, porque no se la puede expresar en términos de la unidad ó partes de ella, se llaman también los resultados de la comparación, *números* ó *cantidades irracionales.*

Diferentes pueden ser los orígenes de esta clase de números: si provienen de la extracción de raíces, como

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \text{ etc.},$$

se les da la denominación especial de *irracionales;* si de otra causa ú operación cualquiera, la de *trascendentes.*

Nota. El caso de resultar números irracionales como expresiones de líneas, áreas, etc., es lo más frecuente en la geometría; por esto es que, como preliminares de las teorías que vamos á exponer, hemos dado la noción de tales números, cuya naturaleza se comprenderá mejor en virtud de

6. CONSIDERACIONES ALGEBRICAS.—Estas consideraciones se fundan en los siguientes

TEOREMAS

I. *Si un número, dividiendo el producto de dos factores, es primo con uno de ellos,* **dividirá el otro factor.**

Decimos que, si es

$$\frac{ab}{c} = \text{número entero;}$$

y a, primo con c: éste dividirá el otro factor b.

Demostración. Supongamos $a > c$: por la determinación del máximo común divisor, resulta la serie de operaciones

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \alpha & & \gamma & & \varepsilon & & \theta & & \eta & \\ a & : & c & : & \beta & : & \delta & : & \eta & : & 1\,; \end{array}$$

$$\frac{c\alpha}{\beta}\ \frac{\beta\gamma}{\delta}\ \frac{\delta\varepsilon}{\eta}\ \frac{\eta\theta}{1}$$

luego

$$\begin{array}{lcl} a=c\alpha+\beta, & & a-c\alpha=\beta, \\ c=\beta\gamma+\delta, & \text{ó} & c-\beta\gamma=\delta, \\ \beta=\delta\varepsilon+\eta, & & \beta-\delta\varepsilon=\eta, \\ \delta=\eta\theta+1; & & \delta-\eta\theta=1; \end{array}$$

ó, multiplicando éstas por b,

$$ab-bc\alpha=b\beta, \qquad (1)$$
$$cb-b\beta\gamma=b\delta, \qquad (2)$$
$$b\beta-b\delta\varepsilon=b\eta, \qquad (3)$$
$$b\delta-b\eta\theta=b. \qquad (4)$$

Mas, en la (1), es, por hipótesis, ab divisible por c; y éste divide su múltiplo $bc\alpha$; luego divide la diferencia $b\beta$. En la (2), c divide su múltiplo cb; y también el producto $b\beta\gamma$, por la (1); luego c divide la diferencia $b\delta$. En la (3), c divide $b\beta$, por la (1); y el producto $b\delta\varepsilon$, por la (2); luego c divide la diferencia $b\eta$. Finalmente, en la (4), c divide el producto $b\delta$, por la (2); y también, el producto $b\eta\theta$, por la (3); luego c divide la diferencia de estos dos productos, que es b. Luego c divide el factor b del producto supuesto.

L. Q. D. D.

II. *Si un número, dividiendo el producto de dos factores, es primo con uno de ellos, todo divisor común del número y del producto,* lo es de aquél y del otro factor de éste.

Decimos que, si es

$$\frac{ab}{c}=\text{número entero;}$$

y m divide el producto ab, como el número c: si éste es primo con a, m dividirá c y el otro factor b.

Demostración. Como es c primo con a, al dividir c el producto ab, c, por el teor. I, divide b: sea pues,

$$\frac{b}{c}=\alpha, \text{ número entero;}$$

luego

$$b=\alpha c; \qquad (a)$$

pero como m, por el supuesto, divide el producto ab y el número c, siendo β el cociente de éste, resulta

$$c=m\beta;$$

por lo que es la [a]

$$b=\alpha c=\alpha m\beta=\alpha\beta\, m;$$

ó

$$\frac{b}{m}=\alpha\beta, \text{ número entero;}$$

luego m divide c y el factor b del producto.

L. Q. D. D.

III. (Más general que el anterior). *Si un número que es primo con uno de los dos factores de un producto, tiene con éste un divisor común,* **el divisor lo será del número y del otro factor.**

Decimos que, si c es primo con el factor a del producto ab, el divisor común m de éste y de c, lo es de c y b.

Demostración. Si α, β son, respectivamente, los cocientes de las divisiones de ab, c por m, resultan:

$$ab=m\alpha,\ c=m\beta; \qquad (b)$$

y, dividiendo la 1ª de éstas por a, sale

$$b=\frac{m\alpha}{a}=\text{número entero,} \qquad (c)$$

por ser el primer miembro ab divisible por a; pero a no puede dividir m; porque si

$$\frac{m}{a}=\gamma, \text{ número entero,}$$

sería $$m=a\gamma;$$

y, por la 2ª de las *(b)*,

$$c=m\beta=a\gamma\beta$$

y así c, a tendrían el mismo a como factor ó divisor común, lo que es contra la hipótesis de ser primos a, c; luego, por el teor. I, a divide α: sea este cociente γ; por tanto es la (c),

$$b=\frac{m\alpha}{a}=m\frac{\alpha}{a}=m\gamma;$$

y como es $$c=m\beta:$$

b, c tienen el divisor común m, que lo es de c y el producto ab.

L. Q. D. D.

IV. *Si un número es primo con los dos factores de un producto*, **el número es primo con éste.**

Decimos que si c es primo con a, b: c y el producto ab son primos.

Demostración. Porque si c, ab no fueran primos, los factores comunes de c, ab lo serían de c y a ó b (teor. III), ó de c y a, b á un tiempo; luego no serían á un tiempo primos c, y a, b, lo que es contra el supuesto de que lo sean.

L. Q. D. D.

V. *Si cada uno de los factores de un producto es primo con cada uno de los factores de ótro*, **los productos son primos entre sí.**

Decimos que, si cada uno de los factores del producto

$$P = a \times b \times c \times \ldots\ldots\ldots\ldots l$$

es primo con cada uno de los factores del

$$P' = \alpha \times \beta \times \gamma \times \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda:$$

los productos P, P' son primos entre sí.

Demostración. Pues, de conformidad con el teorema anterior, si es a primo con α, β; lo será con el producto $\alpha \times \beta = \alpha\beta$: si lo es con $(\alpha\beta)$, γ; lo será igualmente con el producto $(\alpha\beta) \times \gamma = \alpha\beta\gamma$: si lo es con $(\alpha\beta\gamma)$, δ; lo será asimismo con el producto de éstos, $(\alpha\beta\gamma) \times \delta = \alpha\beta\gamma\delta$; y así en adelante. Luego el factor a del producto P, será primo con el producto de todos los factores

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda,$$

del producto P'; ó, lo que es lo mismo, a será primo con P'. Como un razonamiento igual es aplicable á cada uno de los demás factores del producto P respecto de los productos sucesivos formados con los factores del P'; se sigue que es P' un número primo con cada uno de los factores

$$a,\ b,\ c, \ldots\ldots\ldots\ldots,\ l \qquad (d)$$

del P; luego, el número ó producto P' será primo con $a \times b = ab$; con $(ab) \times c = abc$, con $(abc) \times d = abcd$; y así en adelante; luego será primo con el producto de todos los factores (d) del P; ó, lo que es lo mismo, primo con éste. Así los productos

$$\left. \begin{array}{l} P = a \times b \times c \times \ldots\ldots\ldots l, \\ P' = \alpha \times \beta \times \gamma \times \ldots\ldots\ldots \lambda \end{array} \right\} \qquad (e)$$

son primos entre sí.

L. Q. D. D.

(Continuará).