ALGEBRA

POR

LINO MARIA FLOR

Civil y Militar, Profesor en la Universidad Central

(Continuación)

SECCION 3ª

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

83. Se sabe lo que es máximo común divisor (26); pero antes de ver como se determina el máximo común divisor de dos ó más números, veamos cómo se descompone un número aplicando la siguiente:

Regla.—*Para descomponer un número en sus factores primos, se divide el número y cada cociente sucesivo por el menor factor divisible, fuera de la unidad, hasta obtener el cociente úno: todos los divisores son los factores simples que multiplicados entre sí producen el número descompuesto.*

Ejemplos:

Sea 2 160 el número que se quiere descomponer y dividámoslo sucesivamente:

2160:	2
1080:	2
540:	2
270:	2
135:	3
45:	3
15:	3
5:	5
1:	.

El número 2 está repetido cuatro veces de divisor; el 3, tres; y el 5, una; de donde se ve que para formar el número descompuesto se debe poner de factor á cada uno de los divisores simples, tantas veces cuantas está de divisor en la descomposición, como sigue:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3^3 \times 5 = 2\,160$$

De donde se tiene: *que para encontrar el mismo número descompuesto en sus factores primos, se multiplican entre sí todas las potencias de los factores primos sucesivos, propios del número, y su producto es, evidentemente, el número descompuesto.*

Descompongamos también el número 15 120.

15 120:	2
7 560:	2
3 780:	2
1 890:	3
630:	3
210:	2
105:	5
21:	3
7:	7
1:	.

Los divisores que se convierten en factores del número descompuesto, son:

$$2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 15\,120$$

84. TEOREMA.—*Un número entero no puede tener dos descomposiciones distintas en factores simples.*

Porque si fuese: $N = 3 \times 5 \times 7$ y se pudiese descomponer de otro modo el mismo número N; por ejemplo en: $N = 2 \times 3 \times 5$; sería, evidentemente, $3 \times 5 \times 7 = 2 \times 3 \times 5$; y en esta igualdad dividiendo sus dos miembros por 3×5, queda $7 = 2$, ó el absurdo de que 7 sea igual á 2; y como éste absurdo se repetiría en cualquier caso de dos descomposiciones distintas de un mismo número, resulta que los factores simples de un número *siempre serán unos mismos;* porque también si alguno de ellos fuese posible que variase en más ó menos, se tendría en más ó menos otro producto y nunca el dado; pero también es cierto que pueden encontrarse los factores primos en cualquier orden; porque el producto no se altera alterando el orden de los factores.

85. MÁXIMO COMÚN DIVISOR.—Según la definición de *m.c.d.* búsquese el de los números siguientes, que descompuestos en sus factores simples dan:

$$\begin{aligned} 210 &= 2 \times 3 \times 5 \times 7 \\ 420 &= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \\ 2100 &= 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \\ 6300 &= 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \end{aligned}$$

En este caso las potencias mínimas y comunes á todos los números dados, son: $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$, y su producto 210, es el *m.c.d.* de todos estos números; porque este número contiene todos los factores comunes en sus mínimas potencias: y por tanto se halla contenido en cada número de los dados, desde el menor que es el mismo *m.c.d.* hasta el último mayor; porque cada número de los dados siendo divisible por cada uno de los factores primos que forman el *m.c.d.*, lo es por el producto de éstos, que es el máximo común divisor.

Y en este otro ejemplo, tenemos:

$$
\begin{aligned}
520 &= 2^3 \times 5 \times 13 \\
700 &= 2^2 \times 5^2 \times 7 \\
1700 &= 2^2 \times 5^2 \times 17 \\
2080 &= 2^5 \times 5 \times 13
\end{aligned}
$$

Las potencias mínimas y comúnes á todos los números dados son sólo 2^2 y 5; y por ello es: $2^2 \times 5 = 20$, el *m.c.d.*; pues, los demás factores primos 7, 13 y 17 no se toman en cuenta; porque si alguno de ellos formase el *m.c.d.*; su producto no se contendría en los otros números que no tienen tal factor.

86. Regla.—*Para hallar el* m.c.d.; *de dos ó más números, éstos se descomponen en sus factores primos, y sólo de los factores comúnes á todos los números dados, las potencias mínimas se multiplican entre sí y el producto es el* m.c.d. *de los números descompuestos.*

Ejemplo.

Sean los polinomios: $4a^2+8ab+4b^2$; $4a^2-4b^2$; y, $6a^4-6b^4$, cuyo *máximo común divisor* se busca:

Tenemos: $4a^2+8ab+4b^2 = 2^2\,[a+b][a+b]$;

$4a^2-4b^2 = 2^2\,[a+b][a-b]$;

y, $6a^4-6b^4 = 2\times 3[a^2+b^2][a+b][a-b]$.

Los factores simples comúnes y potencias mínimas de los tres polinomios son 2 y $[a+b]$; luego, el *m.c.d.* de los polinomios dados es el producto $2[a+b]$.

87. Hay casos en los que, los factores primos de algunos números no son conocidos, y entonces para encontrar el *m.c.d.* de dos números se debe saber el.

88. Teorema.—*El* m.c.d *de dos números es el* m.c.d. *dél menor número y del resto, que resulta de dividir el mayor número por el menor.* La demostración de este principio se halla en el teorema [12] y en la demostración del Nº 90 que sigue.

89. Regla.—*Para encontrar el máximo común di-*

visor de dos números se divide el mayor por el menor, este menor por el resto, este resto por el segundo resto, y así en adelante, hasta hallar un resto cero, y el último divisor es el m.c.d. buscado.

EJEMPLO.

Sean los números 12 747 y 1 785 cuyo *m.c.d.* se busca.

Siguiendo la regla anterior tenemos:

$$\begin{array}{r|r|r|r} & 7 & 7 & 12 \\ 12747 & 1785 & 252 & 21 \\ \hline 12495 & 1764 & 252 & \\ \hline ..252 & ..21 & 000 & \end{array}$$

El número 21, último divisor, es el *m.c.d.*; de los números propuestos.

90. Ahora para demostrar generalmente este procedimiento, búsquese el *m.c.d.* de los números generales a y b; y llamemos c, c_1, c_2, c_3, etc., los cocientes de la división de a por b y de los restos sucesivos, que los designamos por r, r_1, r_2, r_3, etc. Ejecutando las divisiones sucesivas tenemos:

$$\begin{array}{r|c|c|c} & c & c_1 & c_2 \\ a & b & r & r_1 \\ \hline cb & c_1 r & c_2 r_1 & \\ \hline r & r_1 & 0 & \end{array}$$

De donde se tiene según la regla, que r_1, último divisor, es el *m.c.d.*; puesto que suponemos que el tercer resto es cero.

De las divisiones sucesivas resultan las igualdades siguientes:

$$a=c\,b+r$$
$$b=c_1 r+r_1$$
$$r=c_2 r_1+0$$

Pues en la última igualdad se ve que el resto r es un múltiplo de r_1 y del tercer cociente c_2; por tanto r_1 divide exactamente á r; en la penúltima igualdad r_1 dividide también al producto c_1r; porque sí un número divide á ótro, divide á un múltiplo cualquiera (Teo. 10); luego, r_1, divide á la suma b, [Teo. 9]; y por último, en la primera ecuación a, es la suma $r+cb$, que evidentemente, es divisible por r_1, luego r_1 divide á a y á b.

Y, r_1 es el *máximo ó mayor común divisor* de a y b; porque r_1, es un factor de r é igual al último residuo; y cualquier otra cantidad mayor que r_1. no puede llenar las dos condiciones al mismo tiempo.

Sean también los polinomios: $6a^3-4a^2-6ab^2+2a+4b^2+2b$ y $2a^2-2b^2$, cuyo *m.c.d.* se busca; para lo que dividamos el primer polinomio por el segundo, siguiendo lo prescrito por la regla ya demostrada, se obtiene:

$$\begin{array}{l|l|l}
 & \underbrace{3a}\quad\underbrace{-2} & \underbrace{a}\quad\underbrace{-b} \\
6a^3-4a^2-6ab^2+2a+4b^2+2b & 2a^2-2b^2 & 2a+2b \\
-6a^3 \qquad\quad +6ab^2 & -2a^2-2ab & \\
\qquad -4a^2 \qquad\quad +2a+4b^2+2b & \qquad -2ab-2b^2 & \\
\qquad +4a^2 \qquad\qquad\quad -4b^2 & \qquad +2ab+2b^2 & \\
\qquad\qquad +2a \qquad\quad +2b & \qquad\quad 0 \quad\ 0 &
\end{array}$$

El último divisor $2a+2b=2\,[a+b]$, es el *m.c.d.* buscado.

91. REGLA.—*El* m.c.d. *de más de dos números se halla, buscando, en primer lugar, el* m.c.d. *de dos números de los dados; en seguida se busca el del tercer número dado y el del* m.c.d. *encontrado; después, el del cuarto número dado y el de éste* m.c.d., *y así en adelante: el* m.c.d. *último es el de todos los números dados.*

EJEMPLO.

Sean los números 1 176,672,224, y 70, cuyo *m.c.d.* se busca.

El *m.c.d.* de: $\underbrace{1\,176 \text{ y } 672}$
es: 168; el de: $\underbrace{224 \text{ y } 168}$
es: 56; y el de: $\underbrace{70 \text{ y } 56}$
es: 14.

Es pues, 14 el *m.c.d.* buscado.

Se *demuestra*. Sean los números generales, los dados a, b, c, d, etc., y los máximos comúnes divisores sucesivos m, m_1, m_2, m_3, etc., y será:

El *m.c.d.* de $\underbrace{a \text{ y } b}$
es: m; el de: $\underbrace{c \text{ y } m}$
es: m_1; el de: $\underbrace{d \text{ y } m_1}$
es: m_2; y decimos que m_2 es el *m.c.d.* de todos los números dados; porque m_2 se halla contenido en m_1 y d; pero m_1, está contenido en m y c; y además, m está en a y b; luego, m_2, se halla contenido en a, b, c, d.

Y, m_2, es el *m.c.d.* de los números; porque sí otro divisor común fuese mayor que m_2, estando contenido en m, m_1 debería contenerse también en m_2; lo cual no puede ser siendo mayor que m_2.

92. *Mínimo común múltiplo.*—Se sabe lo que es *m.c.m.* de dos ó más números [25]; y para determinarlo según esa definición, los números dados se descomponen en sus factores primos, y se multiplican entre sí, sólo todas las mayores potencias de los diferentes factores primos de que constan los mismos números.

EJEMPLOS

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$
$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$
$$108 = 2^2 \times 3^3$$
$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

Las mayores y diferentes potencias de todos estos factores simples son $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 3780$, cuyo producto es el *mínimo común múltiplo* de los cuatro números.

¿Cuál es el *m.c.m.* de: $8a^2 - 8b^2$; $2a^2 + 8ab + 8b^2$; y $4a + 8b$?

$$\begin{array}{lll} \text{es} & 8a^2 - 8b^2 = 2\,[2a+2b] & [2a-2b] \\ & 4a^2 + 8ab + 4b^2 = [2a+2b]^2 = [2a+2b][2a+2b] & \\ & 8a + 8b = 2^2\,[2a+2b] & \end{array}$$

Las mayores y diferentes potencias son: 2^2, $[2a-2b]$ y $[2a+2b]$, cuyo producto $2[2a-2b][2a+2b]$ es el *mínimo común múttiplo* buscado.

Esta expresión algebraica es el producto de todos los factores primos de cada número dado con sus mayores potencias; y por esto contiene á cada número, y es el menor producto que se puede formar de modo que contenga también á cada número; porque si se tomase una potencia menor de cualquier factor de entre éstos; resultaría que el *m.c.m.* no contendría á uno, dos ó tres de los mayores números dados, sino que éstos serían mayores que el mismo *m.c.m.*

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} 6a + 6b &= 2 \cdot 3[a+b] \\ 8ac + 8bc &= 2^3 c\,[a+b] \\ a^2 - b^2 &= [a+b][a-b]. \end{aligned}$$

El *mínimo común múltiplo* es: $3 \times 2^3 \times c[a+b][a-b]$; pues sí tomásemos en vez de 2^3, el factor 2; el número $2^3c[a+b]$ sería mayor que el múltiplo, lo cual no puede ser, una vez que mínimo común múltiplo es el producto divisible por todos los números dados.

93. Cuando los factores primos de los números dados no son conocidos, *se halla el* m.c.m. *de dos números, buscando antes el* m.c.d. *de los dos mismos números; y dividiendo uno de éstos por el* m.c.d. *encontrado, el cociente se multiplica por el otro número.*

EJEMPLO

Sean los números 744 y 1032, y el $m.c.d.$ de éstos es, 24; y que según la regla resulta:

$$\frac{1\,032}{24}\times 744=\frac{744}{24}\times 1\,032=31\,992.$$

De donde se tiene, que 31 992 es el $m.\ c.\ m.$ buscado.

DEMOSTRACIÓN; sean los números generales a y b, y el $m.c.d.$ encontrado n; de donde se tiene que el $m.c.m.$ de a y b es:

$$\frac{a}{n}\times b=\frac{b}{n}\times a=\textit{mínimo común múltiplo.}$$

Siendo pues, $\frac{a}{n}=c$; y, $\frac{b}{n}=d$, se tiene: $a=nc$; y $b=nd$ y, c y d cocientes enteros y números primos; y n el $m.c.d.$ de los dos números dados por la suposición. Ahora multiplicando las dos igualdades penúltimas entre sí, resulta:

$$\frac{a}{n}\times\frac{b}{n}=c.d;$$

$$\text{de donde, } \frac{a}{n}\times b=\frac{b}{n}\times a=n.c.d;$$

pero, c y d son números primos; porque son los cocientes de los números dados cuyos factores simples son desconocidos; y el producto $n\times c\times d$ es el $m.c.m.$ de los números dados; y no hay otro menor, que los contenga; porque $n\ c=a$ y $n\ d=b$; en donde n tiene todos los factores comúnes á los dos números dados y $c\times d\times n$ es el producto de los factores primos diferentes que contienen los dos números dados; luego $n.c.d.$ es de $m.c.m.$ ó el producto formado por todas las potencias diferentes que contienen los mismos números. Y también, como el $m.$

c. m. de números primos es el producto total de los mismos, se deduce que $c \times d$ es invariable, el que multiplicado por el *m. c. d.* de los dos números no es otra cosa que el producto de los dos cocientes por las mínimas potencias comunes, que necesariamente representan el menor producto que se puede formar de los factores de los números dados, de modo que contenga á cada uno de ellos exactamente.

Además c y d son números primos y los números primos no tienen más factor común que la unidad, pero el *m. c. m.* se forma de todos los factores diferentes que contienen los números con sus mayores exponentes ó potencias, luego, el *m. c. m.* de $c \times d$ ó de dos ó más números primos es el producto de todos ellos; porque éstos son los factores primos diferentes que deben formar el *m. c. m.*; luego, $c \times d$, es un producto invariable.

94. *Para encontrar el* m. c. m. *de varios números se busca el de dos números; después el de este* m. c. m. *y el tercer número; en seguida de este* m. c. m. *y el cuarto número; así en adelante: el último* m. c. m. *es el de todos los números propuestos.*

EJEMPLO

Sean los números 30, 24, 120 y 144. Según las reglas, el *m. c. m.* de los

dos números, $\underbrace{30 \text{ y } 54}$,

es: 135; el de, $\underbrace{135 \text{ y } 120}$

es: 540; y el de $\underbrace{540 \text{ y } 144}$

es: 2 160.

El número 2 160, último *m. c. m.* es el de los números dados.

Para demostrar este principio, sean los números generales a, b, c, d, etc. y los mínimos comúnes múltiplos sucesivos m, m_1, m_2, etc.

y resulta que el *m. c. m.* de $\underbrace{a \text{ y } b}$

es: m; el $\underbrace{\text{de } m \text{ y } c}$,

es: m_1; el $\underbrace{\text{de } m_1 \text{ y } d}$,

es: m_2, etc.

Como se ve, m_2 es múltiplo de m_1 y d; m_1 múltiplo de m y c; y m múltiplo de a y b; luego, m_2 es múltiplo de a, b, c, d. Y m_2 es el *m. c. m.* ó el menor producto que se puede formar de los factores primos de los números propuestos; porque si fuese el *m. c. m.* cualquier otro número menor que m_2, conteniendo este número á a, y á b, contendría á m, m_1, m_2; lo cual no es posible siendo menor que m_2.

CAPITULO V

FRACCIONES ALGEBRAICAS

SECCION 1ª

Definiciones y teoremas.

95. *Fracción algebraica es el cociente que tiene por dividendo y divisor cantidades enteras ó fraccionarias.* Y se llama, en este caso, al dividendo *numerador*, y al divisor *denominador*. El numerador indica ó expresa el número de partes que se ha tomado de la unidad; y el denominador manifiesta la denominación de la fracción ó las partes en las que se ha dividido la misma unidad.

El numerador y denominador son conocidos también con el nombre de términos de la fracción.

96. Un quebrado es propio, sí el numerador es menor que el denominador; pues, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ son quebrados propios: valen menos que la unidad y sólo repre-

sentan partes de la misma unidad; y, $^3/_3$, $^4/_2$, $^6/_4$ son fracciones impropias; porque valen la unidad entera y más de la unidad, llamándose impropiamente fracciones por contener números enteros.

La suma indicada de un número entero y una fracción se llama *número mixto*; $a+\frac{b}{c}$; pero el signo *más* se suprime, generalmente, y se escriben los números mixtos $a\frac{b}{c}$, y, $2\frac{3}{4}$.

97. *De dos quebrados que tienen iguales numeradores es mayor el que tiene menor denominador.*

Así: $^4/_5 > {}^4/_8$; esto es cuatro quintos mayor que cuatro octavos.

Porque en este caso $^4/_5$ expresa que la unidad se ha dividido en cinco partes iguales y de estas se han tomado cuatro, como lo indica el numerador; mas, $^4/_8$ expresa qne la unidad está dividida en ocho partes, cuyas unidades fraccionarias son más pequeñas que las quintas partes del anterior quebrado, y de estas se han tomado también cuatro octavas partes, ó la mitad de la unidad; y mientras que á $^4/_5$ le falta sólo $^1/_5$ para la unidad, á la otra fracción le falta la mitad ó sean cuatro octavos.

De dos quebrados que tienen igual denominador es mayor el que tiene mayor numerador.

Así: $^5/_6 > {}^2/_6$; esto es, cinco sextas partes mayor que las dos sextas partes.

En este caso la unidad está dividida en las mismas partes en entrambos quebrados; y por ello, el quebrado que tiene mayor numerador, es mayor; porque tiene más número de partes fraccionarias iguales.

Teoremas:

98. 1º *Una cantidad dividida por sí misma da por cociente la unidad.*

$$\frac{3}{3}=1; \text{ ó, } \frac{a}{a}=1.$$

Porque el cociente multiplicado por el divisor da el dividendo: $1 \times 3 = 3$; ó, $1 \times a = a$.

Luego también toda cantidad dividida por la unidad da por cociente la misma cantidad $\frac{a}{1} = a$; porque el cociente multiplicado por el divisor da el dividendo:

$$a \times 1 = a.$$

99. 2º *Una fracción no altera su valor multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número.*

Sea la fracción $\frac{a}{b} = c$; de donde se tiene que $a = bc$; y, multiplicando esta igualdad por e, resulta: $ae = bce$, que en otra forma da: $\frac{ae}{be} = c$; en donde es: $\frac{a\,e}{b\,e} = \frac{a}{b}$; porque $\frac{e}{e}$ es igual á la unidad; luego no se altera el valor de la fracción multiplicando sus dos términos por una misma cantidad.

La segunda parte del teorema resulta dividiendo numerador y denominador por e:

y decimos que: $$\frac{\frac{a}{e}}{\frac{b}{e}} = \frac{a}{b};$$

porque, multiplicando el primer miembro ó sea el numerador y denominador por e; no se altera la fracción, según la primera parte del teorema; y queda el segundo miembro $\frac{a}{b}$, ó sea la misma fracción sin ninguna alteración de valor.

100. 3º *El cociente de una fracción, ó la misma*

fracción, no se altera variando los signos de sus dos términos.

Decimos que:

$$\frac{+a}{+b}=\frac{-a}{-b}=+c.$$

Pues equivale á multiplicar numerador y denominador del primer miembro por—1; y al ejecutar la división, el signo del cociente es positivo en úno y otro caso; porque más por más igual más; y menos por menos igual más; pues signos iguales de dividendo y divisor producen signos positivos para los cocientes [53].

101. 4º—*Para dividir un producto por un número, basta dividir el un factor por el número y el cociente multiplicar por el otro factor.*

Esto es: si $a \times b$ es el probucto y c el número divisor, se tiene:

$$\frac{a}{c}\times b=\frac{b}{c}\times a=\frac{ab}{c}$$

Se demuestra: multiplicando cada uno de estos tres cocientes por el divisor c, resulta en cada uno de ellos el dividendo $a\ b$;

pues: $$\frac{a}{c}+bc=\frac{b}{c}\times a\ c=\frac{abc}{c}=ab;$$

luego es verdadero el teorema.

Ejemplo

Sean, el producto 12×16 y 4 el número, y es:

$$\frac{12}{4}\times 16=\frac{16}{4}\times 12=\frac{12\times 16}{4}=48.$$

102. 5º—*Para multiplicar un cociente por un número, se multiplica por el dividendo ó se divide el divisor por el número.*

Sean, $\frac{a}{b}$ el cociente y c el número.

Primera parte: según la definición [33] de la multiplicación se tiene que $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$; porque el producto ha de ser como el multiplicando $\frac{a}{b}$; así como c es respecto de la unidad positiva; ó, $\frac{a}{b}$ se ha de tomar tantas veces como sumando cuantas unidades tiene c; luego $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$.

Segunda parte: en el cociente $\frac{ac}{b}$, dividiendo numerador y denominador por c no se altera la fracción [99, Teo. 2º] y resulta:

$$\frac{ac}{b}=\frac{ac:c}{b:c}=\frac{a}{b:c};\ \text{luego},\ \frac{ac}{b}=\frac{a}{b:c}.$$

Luego para multiplicar un cociente por un número se multiplica por el dividendo ó se divide el divisor por el número.

EJEMPLO

Sean, $\frac{12}{8}$ el cociente y 4 el número, y será:

$$\frac{12\times4}{8}=\frac{12}{8:4}=6.$$

103. 6º—*Para dividir un cociente por un número, se multiplica por el divisor ó se divide el dividendo por el número.*

Sean $\frac{a}{b}$ el cociente y c el número; y se tiene multiplicando dividendo y divisor por b que no se altera el valor del cociente y demuestra la primera parte del teorema;

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a\,b}{b}:\ bc=a:bc=\frac{a}{b\,c}.$$

Ahora dividiendo numerador y denominador de la última expresión por c, tenemos;

$$\frac{a}{bc}=\frac{a:c}{bc:c}=\frac{a:c}{b}$$

luego, es: $\frac{a}{bc}=\frac{a:c}{b}$; ó para dividir un cociente por un número, se multiplica el divisor ó se divide el dividendo por el número.

EJEMPLO

Sean, el número 6 y el cociente $\frac{36}{3}$, y es:

$$\frac{36}{3\times 6}=\frac{36:6}{3}=2.$$

104. 7º—*Para dividir un número por un producto, se divide el número por uno de los factores y el cociente se divide por el otro factor.*

Sea el número a y el producto $b\times c$; ó el cociente: $\frac{a}{b\times c}$.

Dividiendo, en primer lugar, por c, y después, por b el mismo cociente se tiene:

$$\frac{a}{b\,c}=\frac{a:c}{bc:c}=\frac{a}{b}:c;\ \text{y}, \frac{a}{b\,c}=\frac{a:b}{b:b\times c}=\frac{a}{c}:\ b;$$

de donde: $$\frac{a}{b\,c}=\frac{a}{b}:c=\frac{a}{c}:b.$$

EJEMPLO

Sean, el número 48 y el producto 3×8, y se tiene:

$$\frac{48}{3\times 8}=\frac{48}{8}:3=\frac{48}{3}:8=2.$$

105. *Son cantidades recíprocas, las que multiplicadas entre sí dan por producto la unidad.*

Esto es: $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, dan $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$; $\frac{1}{4}$ y 4,

dan $\frac{1}{4}\times 4=1$; y, $\frac{3}{8}\times\frac{8}{3}=1$.

Todas estas cantidades se llaman recíprocas.

106. *Para reducir una fracción á su expresión más sencilla se dividen sus dos términos por sus factores comunes ó por el* m. c. d.; *con lo cual no se altera el valor de la fracción, por la segunda parte de* [99. Teo. 2º]

Reduciendo los términos de la fracción $\frac{16}{32}$, por sus factores comunes, se tiene:

$$\frac{16}{32}=\frac{8}{16}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Ahora este mismo quebrado, dividiendo sus dos términos por el *m. c. d.*, se tiene $\frac{16}{32}:\frac{16}{16}=\frac{1}{2}$; pues, 16 es el *m. c. d.* de los dos términos.

107. *Para dar á los quebrados un común denominador se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los otros quebrados, con lo cual no se altera el valor de cada fracción; y se da una sola denominación á todas las fracciones, poniendo por denominador el producto de todos los denominadores; y sólo entonces se pueden sumar y restar fracciones; por-*