Richard MULLER

MEMORIA

ACERCA DE UN DIQUE VERTEDERO

No se puede conocer un fenómeno, si no se le puede expresar en números.

[LORD KELVIN].

Antes de presentar el análisis de los diques vertederos, no es por demás presentar aquí unos hechos que ha observado el autor.

Uno de ellos, es el que en este país no existen estadísticas relativas á las fuerzas hidráulicas del mismo, fuerzas que tienen el nombre internacional de *hulla blanca*, comparativamente con el carbón de piedra, ó *hulla negra:* esta última se vende á razón de un tanto la tonelada, el primero se vende ó arrienda á razón de tanto el *caballo eléctrico.*

El Gobierno de los E. E. U. U., por medio de su Cuerpo de Ingenieros, ha determinado en 30.000.000 de caballos la fuerza hidráulica del país, pudiéndose elevar dicha fuerza á 150.000.000 de caballos, todo, formando lagos artificiales por medio de diques vertederos.

El senador Putnam dijo lo siguiente en el Congreso de Washington, reunido en mayo de 1908: "Tomando el número conservativo de 30.000.000 de caballos, para desarrollar esta fuerza por medio de carbón, necesitaríamos quemar 225 millones de toneladas de carbón por año. Siendo el precio del carbón $ 3.00 (dollares) la tonelada, el consumo de carbón sería de $ 1.800 millones pesos oro para producir una fuerza equivalente á la fuerza hidráulica del país".

En los E. E U. U., se han desarrollado hasta ahora 3 millones de caballos, es decir, una décima parte de la fuerza disponible, que representa un consumo anual de carbón por un valor de 180 millones de pesos oro.

No es necesario decir que el Ecuador pierde anualmente una renta fabulosa.

Expliquémonos. La meseta de los Andes situada á una altura media de 2.500 metros, tiene una superficie de 33.770 kilómetros cuadrados.

Cuando llueve, ¿qué es lo que ocurre? Una parte de la lluvia se evapora, otra parte se desperdicia por percolación en el suelo, otra parte es absorvida por la vegetación y, por fin, el resto se va á los ríos, y de allí baja al mar.

Esta última parte es la fuerza hidráulica, y, considerando que se pueden instalar plantas hidráulicas en series hasta las planicies que están más ó menos al nivel del mar, esta fuerza corresponde á la fuerza producida por el débito global de los ríos que se encuentran en la meseta de los Andes, cayendo más ó menos de 2.500 metros de altura.

Consideremos nada más que tres ríos conocidos por todos y que el autor tuvo ocasión de medirlos aproximadamente: el Pastaza, en el Agoyán, que tiene más ó menos un débito de 165 metros cúbicos por segundo, el río Paute cuyo débito es de 23 metros cúbicos por segundo, más ó menos, y el San Pedro, que tiene 15 métros cúbicos por segundo mas ó menos. El salto del Agoyan está situado é una altura de 1668 metros sobre el nivel del mar; pudiendo desarrollar por medio de plantas en series y con un rendimiento comercial de 62 %, una fuerza total de 2.300.000 caballos eléctricos.

Los ríos Paute y San Pedro, teniendo un debito total de más ó menos 38 metros cúbicos y estando situados aproximadamente á 2.500 metros sobre el nivel del mar, pueden desarrollar una fuerza más ó menos de 800.000 caballos eléctricos con el mismo rendimiento comercial.

Entonces, nada más que estos tres ríos desarrollan un mínimun de 3.100.000 caballos eléctricos, que corresponde á un consumo de carbón cuyo valor asciende a 360 millones de sucres anuales, suponiendo que en el Ecuador hubiera minas de carbón y que ésta se vendiera á 3 pesos oro como en los Estados Unidos.

Hemos dicho que la fuerza disponible es de 3.100.000 caballos eléctricos, que se podrían arrendar á razón de $ 40 pesos oro el caballo por año, lo que representa una renta anual de *ciento veinticuatro millones de pesos oro.*

Mas arriba se ha visto que los E. E. U. U. ha desarrollado la décima parte de sus fuerzas disponibles; concretémonos á estudiar el caso de que también en el Ecuador se hubiera desarrollado la décima parte de la fuerza disponible, ó sea 310.000 caballos eléctricos, á razón de $ 80 sucres el caballo, por año (tarifa americana), la renta anual sería de veinticuatro millones ochocientos mil sucres (24.800 000). Esta cantidad representa al 3 % anual, un capital de *826 millones de sucres.*

Ahora, qué se pudiera hacer con 310.000 caballos de fuerza? Dos respuestas son estas: 1ª Construir ferrocarriles á tracción eléctrica, 2ª Hacer lo contrario de lo que se ha hecho hasta ahora. Luchar con las otras naciones en el mercado industrial: exportar productos manufactureros, en lugar de importarlos.

Queda así establecida la importancia del desarrollo de las fuerzas hidráulicas, y siendo el dique vertedero un factor importante en este desarrollo, el autor vuelve al objeto primero de este artículo: analizar teóricamente esta clase de diques.

El presente estudio puede ser considerado como convencional y puramente académico, en el sentido de que solamente las fuerzas producidas por la presión del agua y por la gravedad han sido consideradas.

El autor, aunque no sea su intención examinar aquí todas las cuestiones complejas relacionadas con este estudio, considera el presente análisis como solución exacta del problema, y si se han hecho aproximaciones, estas son tales que no afectan los resultados sino entre límites puramente racionales.

No es por demás manifestar la importancia y el objeto de un dique vertedero.

Efectivamente, no se trata de un vertedero de laboratorio que sirve solamente para determinar fórmulas, sino de grandes diques de mampostería destinados á sustituir las acequias y caídas naturales, en las instalaciones hidro-eléctricas modernas. Supóngase una instalación cuya fuerza se deriva por medio del agua conducida á la planta por una acequia: esta última ha sido construída para conducir cierta cantidad de agua; el día que se necesitara un incremento de fuerza en la planta, debido á la extensión del mercado eléctrico, se necesitará ensanchar la acequia ó construir una más grande.

Además, una acequia, una vez establecida, es causa de muchos gastos, sean debidos á su conservación y buen estado en general, ó sea por derrumbes y otros accidentes imprevistos.

De otro lado, el dique de mampostería durará siglos, y no requiere ningún gasto de conservación. Por medio de una centena de metros de tubería de acero, se lleva el agua á la planta, la altura del dique y la pendiente de la tubería que puede hasta ser vertical, ofrecen la caida necesaria para desarrollar la fuerza requerida.

El dique vertedero no tiene otro objeto, aparte del arriba mencionado, que el de dejar pasar por encima el agua que no se necesite ó que podría haber resultado de una creciente súbita.

DESARROLLO TEORICO
DE UN PERFIL MINIMO DE DIQUE VERTEDERO (1)

Hay que hacer un supuesto esencial para simplificar el trabajo: se supone que la línea resultante de las fuerzas (peso del dique y empuje del agua) en la sección del vertedero, pasa por la extremidad del tercio medio de la base. En otras palabras

(1) Resumen de un estudio por el mismo autor que debe haber sido publicado en la "Technique Moderne" de París en el número correspondiente al presente mes.

se ha considerado que el trapecio de presión en la base, es un triángulo, cuyo mínimun es igual á cero. Este supuesto no es deficiente en cuanto concierne al procedimiento aquí empleado, el cual es un perfil mínimo de dique vertedero.

En este estudio, se supone que una sección de dique comprendida entre dos planos paralelos y verticales que le atraviezan, á un pie de distancia uno de otro, resiste contra la presión del agua. En las investigaciones siguientes:

Cara ó frente del dique significará el lado que mira la parte inferior del río.

Espalda significará el lado contrario ó sea la parte contra la corriente.

Toda dimención lineal será expresada en pies.

La unidad de peso será un pie cúbico de agua.

La densidad del concreto con relación al agua será 2, 5.

H = altura del dique.

h = altura del desborde ó derrame del agua.

x = abcisa del punto de intersección de la parábola y la tangente, tomando como origen la cima del dique.

$$\sqrt{h} = m, \text{ ó } m^2 = h,$$

$$\sqrt{x} = Z, \text{ ó } Z^2 = x$$

α= abcisa del círculo que sirve para resolver la ecuación de 4º grado.

β = ordenada del círculo.

R = radio del círculo.

G = distancia del centro de gravedad de la sección de la espalda.

M = momento de presión del agua.

V = peso total de mampostería de la sección del vertedero.

S = distancia ó parte de la base comprendida entre la vertical bajada del centro de gravedad y el punto de intersección de esta base con la resultante de M. y W.

El estudio que sigue se basa en los trabajos de Bazin: "Experiences sur l' Ecoulement en Deversoir", su objeto es determinar la curva parobólica como también excluir la posibilidad de un vacío entre la cara del dique, cuando la descarga sobre la cima de ésta es máxima.

Otra razón es que los coeficientes de M. Bazin son adoptados aquí como base fundamental para los cálculos subsiguientes. Por tanto se desea dar á la cara del dique la misma configuración que la de la superficie inferior de la cascada, como ha trazado Bazin en sus experimentos.

Se considerará, ante todo, el estudio de la curva descrita por el agua en su caída. En la (Fig. I) se ven las curvas superior é inferior de la *nappe* (lámina de agua)como han sido trazadas experimentalmente por Bazin. Aquellas como fácilmente puede verse en la figura, no se extienden mucho por debajo del eje de abcisas.

El problema consiste, ahora, en continuar las dos curvas. Por las tablas, se las puede trazar á una escala relativamente grande para cualquier valor de h.

M. Boussinesq ha establecido en sus estudios teóricos sobre derrame de agua en represa (Comptes Rendus de l' Académie des Sciences Julio–Octubre, 1887), que los filamentos líquidos que pasan por la sección vertical O como A (Fig. I), son sensiblemente paralelos, es decir que todos ellos tienen al pasar aquella sección un centro de curvatura O situado en la perpendicular que pasa por el punto más alto de la *nappe* inferior. Por esta hipótesis aproximada llegó á determinar la ecuación de la velocidad de cada filamento encontrando

$$v = 0{,}475 \sqrt{2gh}$$

para la velocidad en la curva superior y

$$v = 0{,}946 \sqrt{2gh}$$

para la velocidad en la curva inferior. Supuesto entonces, que las velocidades son distribuidas hidrostáticamente en este plano, la velocidad resultante, ó más bien la velocidad media, será la del filamento que pasa siempre á un tercio de la *nappe* inferior, hipótesis la cual, no obstante irregularidades accidentales, fue admitida por M. Flamant, el eminente hidráulico francés.

Por cada valor de la abcisa desde O, I, (Fig I) á la derecha, siendo determinada la distancia vertical entre las dos curvas, el tercio de esta distancia se mida desde la curva inferior hacia arriba.

Uniendo los puntos alternantes por una línea recta y trazando una perpendicular por su punto medio se obtiene la normal á la curva en todo punto. A un tercio de esta normal á partir de la curva inferior se encuentra la curva de las velocidades resultantes ó medias.

Se ha escogido ahora un punto P, en las curvas de las velocidades resultantes, y la parte de la normal situada entre la *nappe* superior é inferior ha llegado á ser por actual medición: 0,44 h. Considerando entonces que el derrame es $Q = 3{,}33\, h^{\frac{3}{2}}$ (omitiendo la velocidad de llegada), la relación

$$\frac{3{,}33\ h^{\frac{3}{2}}}{0{,}44\ h} = 7{,}57\ \sqrt{h}$$ da la velocidad resultante del punto P.

Además, suponiendo que la velocidad horizontal constante esté situada á ⅓ de la *nappe* inferior sobre O a, (Fig. I) y su profundidad con relación al nivel de la superficie del río se halle medida igual á 0,661 h, la velocidad por aquel punto se encuentra por la relación

$$v = \sqrt{2g \times 0{,}661\ h} = 6{,}52\ \sqrt{h}$$

Conociendo entonces la velocidad resultante, $7{,}57\ \sqrt{h}$, se encuentra que la componente vertical es igual á $3{,}84\ \sqrt{h}$.

Describiendo P una parábola, es necesario encontrar su origen.

La velocidad vertical ha sido calculada igual á $3{,}94\ \sqrt{h}$.

El tiempo empleado por el filamento resultante para alcanzar esta velocidad partiendo del reposo se da por

$$t = \frac{v}{g};\ \text{ó}\ t = \frac{3{,}84\ \sqrt{h}}{g} = 0{,}119\ \sqrt{h}$$

El espacio vertical recorrido al fin de este tiempo es $s = \frac{v\ t}{2}$ ó por sustitución,

$$s = 0{,}119\ \sqrt{h} \times \frac{3{,}84}{2}\ \sqrt{h} = 0{,}228\ h.$$

Siendo la velocidad horizontal á razón de $6{,}52\ \sqrt{h}$ por segundo, el espacio recorrido es

$$6{,}52\ \sqrt{h} \times 0{,}119\ \sqrt{h} = 0{,}776\ h-$$

Se encuentra ahora facilmente el origen, estando 0,228 h encima de P y 0.776 h á la izquierda.

La ecuación de la parábola es

$$y_1{}^2 = px_1 \qquad (1)$$

$$\text{ó}\ (0{,}776\ h)^2 = 2\ p \times 0{,}228\ h$$

de donde $2\ p = 2{,}64\ h$

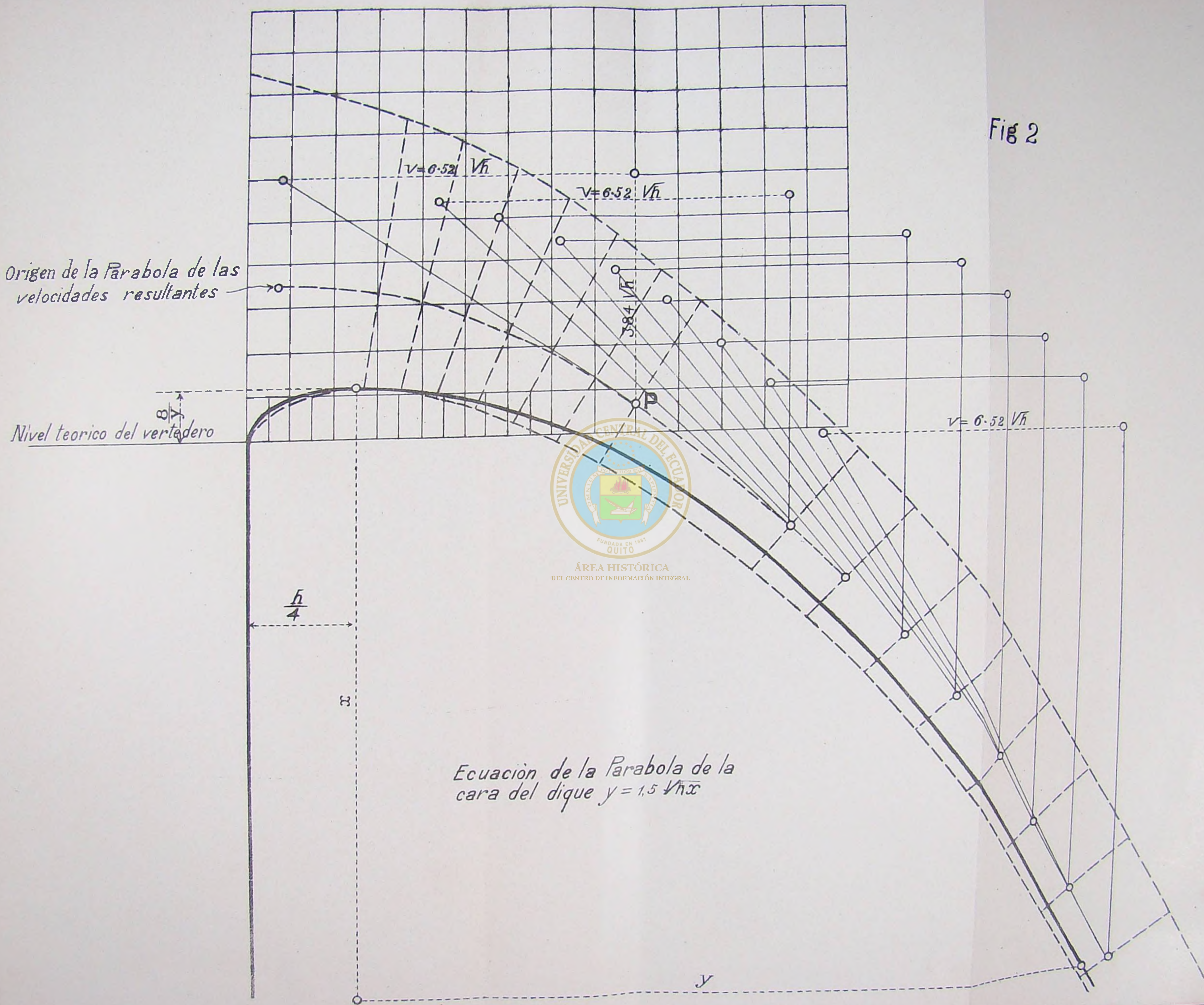

v=6·52 √h
v=6·52 √h
v=6·52 √h
3·84 √h
P
Origen de la Parabola de las velocidades resultantes
y/8
Nivel teorico del vertedero
h/4
x
y
Ecuación de la Parabola de la cara del dique y = 1,5 √hx

Fig 2

sustituyendo en (1) da: $y_1{}^2 = 2{,}64\ h\ x_1$ $\qquad (2)$

La diferencial de [2] es: $\dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{1{,}32\ h}{y_1}$

De las condiciones del problema tenemos también

$$\frac{dy_1}{dt} = \text{constante} = v_{\text{horizontal}} = v$$

Pero $$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy_1\ dx_1}{dt\ dy_1} = v_1 \frac{y_1}{1.32\ h} = v_1 \sqrt{\frac{1{,}51\ x_1}{h}}$$

Esta es la velocidad vertical de un punto cualquiera determinando por x_1.

Conociendo la velocidad horizontal que queda constante para cualquier punto, la resultante se encuentra sin dificultad.

Finalmente $Q = 3{.}33\ h^{3/2}$, dividido sucesivamente por aquellas velocidades resultantes da el espesor de la capa de agua que cae en cualquier punto del fondo x_1 —

Dibujando una normal á la curva en cada punto así determinado y midiendo $\frac{1}{3}$ del espesor del derrame hacia abajo, se determina los puntos de la *nappe* inferior, y $\frac{2}{3}$, medidos hacia arriba ó á la derecha, determina los puntos de la *nappe* superior.

Uniendo todos estos puntos sucesivos, se obtiene las curvas actuales de la caída del agua, teóricamente determinada, ver [Fig. 2].

La curva de la cara de nuestro dique se tomará como una parábola que se extiende un poco hacia adentro de la curva de la caída del agua, siendo su ecuación

$$y_1{}^2 = 2{,}25\ h\ x_1$$

Momento de presión del agua.—El momento de presión del agua contra la espalda del dique se puede determinar de la manera siguiente. Admitamos que dx_2 sea la altura de algún filamento líquido; el momento de presión de este filamento, siendo la densidad del agua igual á la unidad, es

$$x_2 \left[\ H + h - x_2\ \right] d\ x_2$$

ó: $$H\ x_2\ dx_2 + h x_2\ dx_2 - x_2{}^2\ dx_2 .$$

El momento total será

$$M = \int_0^H \left[H\, x_2\, dx_2 + h x_2\, dx_2 - x_2{}^2\, dx_2 \right]$$

$$= \left[\frac{H^3}{2} + \frac{H^2 h}{2} - \frac{H^3}{3} \right]$$

$$= H^2 \left[\frac{H}{6} + \frac{h}{2} \right] \qquad \text{(a)}$$

Se recordará que en la investigación presente, el valor de *h* ha sido actualmente determinado por $\frac{7}{8}$ h, así que sustituyendo este valor en [a] encontramos:

$$M = H^2 \left[\frac{H}{6} + \frac{\frac{7}{8}h}{2} \right]$$

ó:

$$M = \frac{H_2}{48} \left[8H + 21h \right]$$

Perfil del vertedero.—Convendrá ahora, recordar un corolario de geometría analítica, con respecto á las propiedades de la parábola.

"La subtangente al eje es dividido en dos partes iguales por la curva".

Entonces como se observa en la fig. 3, y recordando que la ecuación de la parábola es $y_1{}^2 = 2{,}25\ h\ x_1$, el perfil del dique el cual es analizado á continuación, se reduce á un trapezoide, cuyo ancho en la parte superior es

$$\frac{h}{4} + \frac{3\sqrt{hx}}{4} \qquad \text{ó} \qquad \frac{h + 3\sqrt{hx}}{4}$$

y el ancho de la base es

$$\frac{3\sqrt{hx}\,[H + x] + hx}{4x}$$

Por consiguiente, habiendo determinado los elementos del trapezoide en función de una variable, x, [H y h siendo condiciones dadas del problema] se desea determinar el valor de la variable que permite la resultante de las presiones de agua y de mampostería, que pase por un punto situado á $\frac{1}{3}$ de la estremidad hacia río abajo de la base.

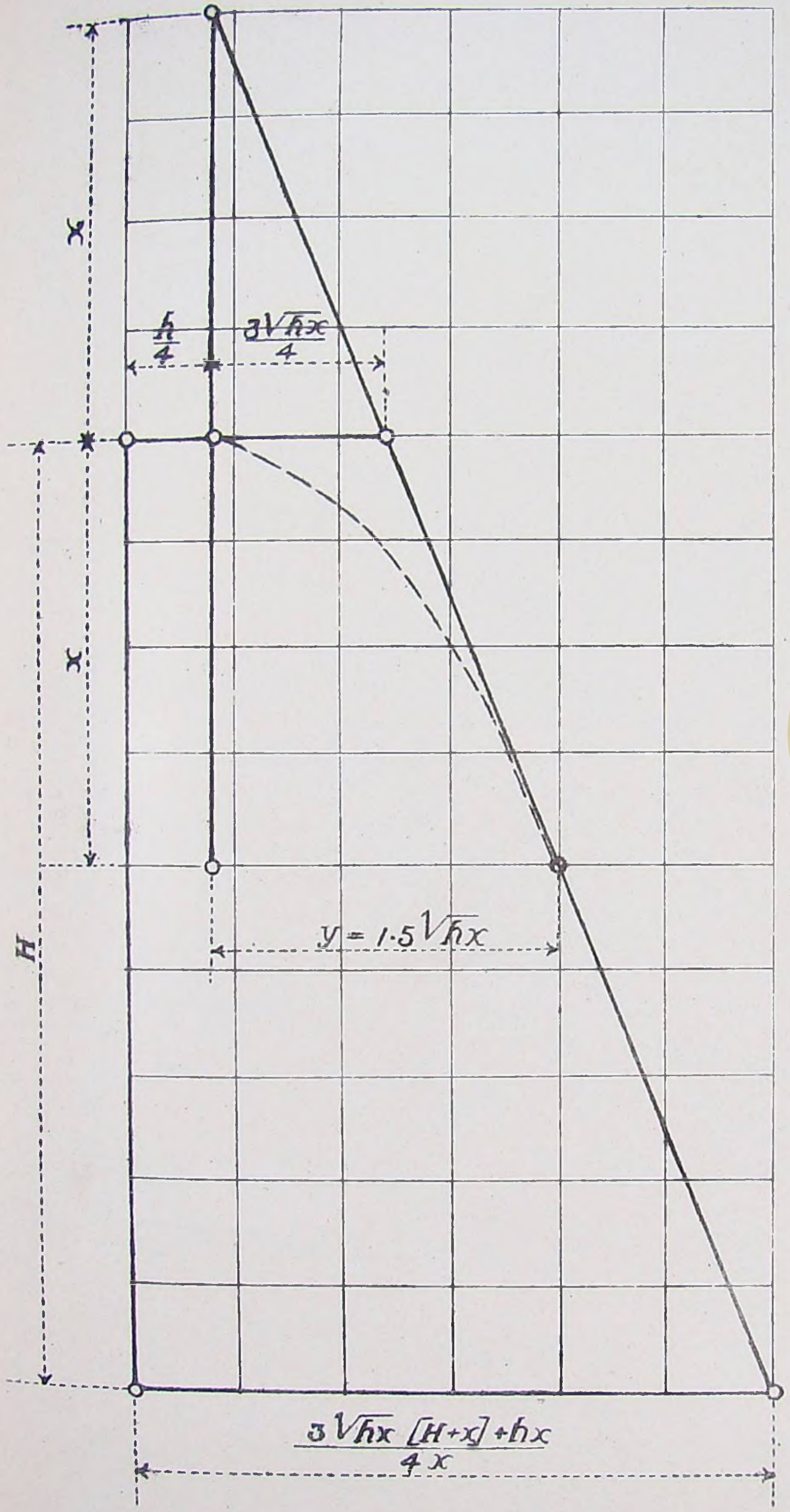


Fig. 3

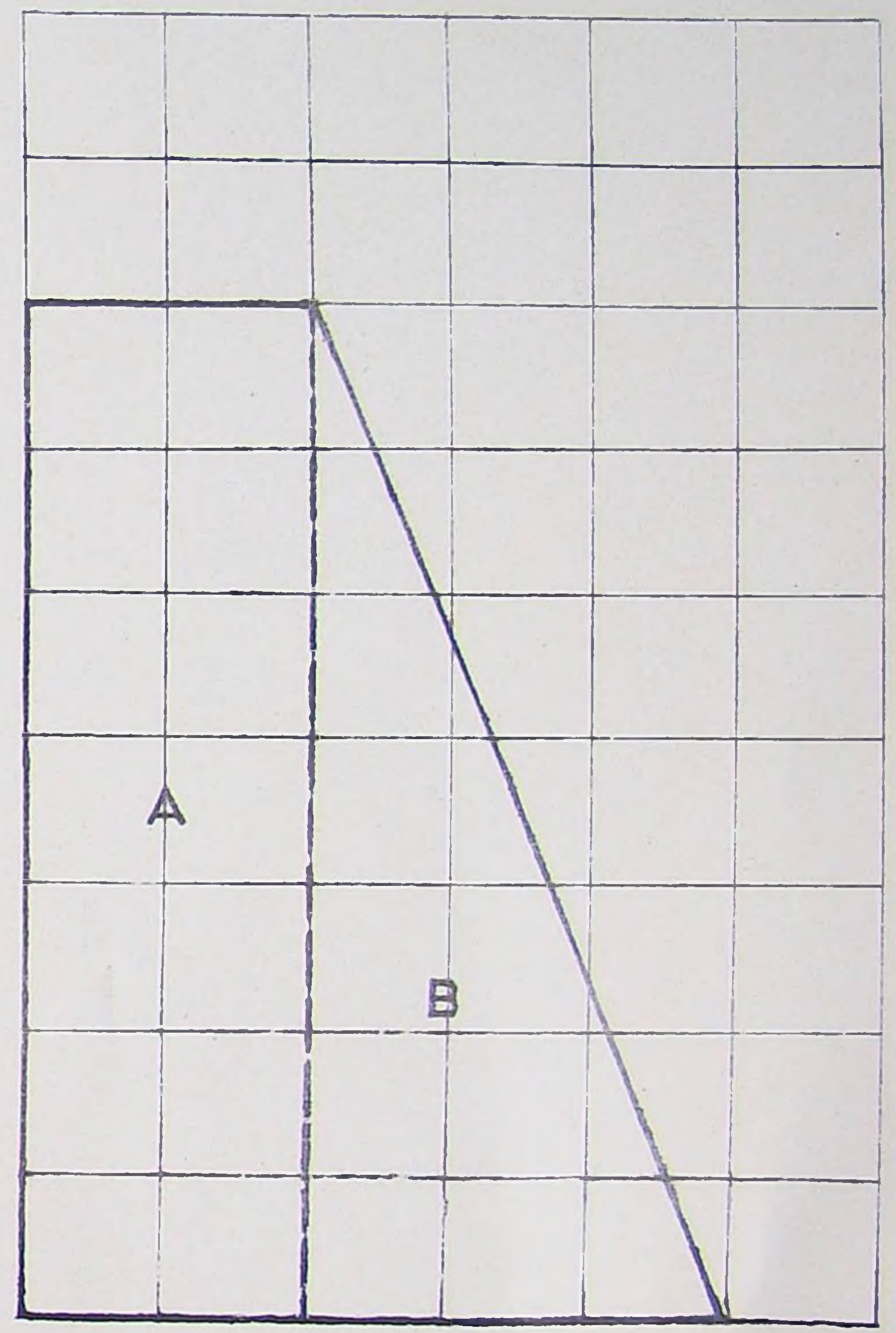


Fig. 4

Hay que determinar el centro de gravedad de la sección con respecto á la espalda. Se divide el trapezoide en dos figuras elementales; un rectángulo y un triángulo.

Considerando el rectángulo A, [fig. 4] su área es:

$$\frac{h \times 3 \sqrt{hx}}{4} \times H$$

y su brazo de palanca con relación á la espalda

$$\frac{h + 3 \sqrt{hx}}{8}$$

El momento se obtiene por la relación

$$H \left[\frac{h + 3 \sqrt{hx}}{4} \right] \times \left[\frac{h + 3 \sqrt{hx}}{8} \right] \text{ ó: } H \left[\frac{h + 3 \sqrt{hx}}{32} \right]^2$$

Asimismo en el caso del triángulo B:

Su area es $\dfrac{3 H^2 \sqrt{hx}}{8x}$

y su brazo de palanca con respecto á la espalda:

$$\frac{\sqrt{hx}\,[\,3x + \sqrt{hx} + H\,]}{4x}$$

El momento será:

$$\frac{3 H^2 h\,[\,3x + \sqrt{hx} + H\,]}{32x.}$$

Siendo la suma de los momentos de A y B

$$\frac{3 H^2 h\,[\,3x + \sqrt{hx} + H\,] + Hx\,[\,h + 3 \sqrt{hx}\,]^2}{32x}$$

y la suma de las areas

$$\frac{H\,[\,2x\,(h + 3 \sqrt{hx}) + 3 H \sqrt{hx}\,]}{8x}$$

la distancia del centro de gravedad con relación á la espalda del dique vertedero será

$$G = \frac{3\,H\,h[3x + \sqrt{hx} + H] + x\,[h+3\,\sqrt{hx}\,]^2}{4\,[2x\,(h+3\,\sqrt{hx}\,)+3\,H\,\sqrt{hx}\,]}$$

La distancia sobre la base, entre la vertical que pasa por el centro de gravedad de la sección, y el punto donde la resultante de las fuerzas de mampostería y del agua pasa, se encuentra dividiendo el momento de la presión de agua por el peso total de la sección considerada.

Habiendo tomado la densidad de la mampostería 2, 5 con relación á la densidad del agua, el peso de la sección se da por

$$W = \frac{2.5\,H\,[2x\,(h+3\,\sqrt{hx}\,)+3\,H\,\sqrt{hx}\,]}{8x}$$

y la distancia S se encuentra por la expresión

$$S = \frac{\frac{H^2}{48}\,[8\,H+21\,h]}{\frac{2.5}{8\,x}\,H\,[2x\,(h+3\,\sqrt{hx}\,)+3\,H\,\sqrt{hx}\,]}$$

$$= \frac{Hx\,[8\,H+21\,h]}{15\,[2x\,(h+3\,\sqrt{hx}\,)+3\,H\,\sqrt{hx}\,]}$$

Por hipótesis, se ha admitido que la resultante intercepta la base á $\frac{1}{3}$ del extremo hacia río abajo, así que $G+S=\frac{2}{3}$ de la base, y como $\frac{2}{3}$ base $= \frac{3\,\sqrt{hx}\,[H+x]+hx}{6x}$ tenemos:

$$\frac{3\,H\,h\,[3x+\sqrt{hx}+H] + x\,[h+3\,\sqrt{hx}\,]^2}{4\,[2x\,(h+3\,\sqrt{hx}\,) + 3\,H\,\sqrt{hx}\,]}$$

$$+ \frac{H\,x\,[8\,H+21\,h]}{15\,[2x\,(h+3\,\sqrt{hx}\,)+3\,H\,\sqrt{hx}\,]}$$

$$- \frac{3\,\sqrt{hx}\,[H+x] + hx}{6x} = 0$$

Por consiguiente esta es la ecuación que hay que resolver con respecto á x, la única incógnita, debiendo ser el valor de esta incógnita tal, que la resultante atraviese la base por el punto especificado anteriormente, determinando de este modo la sección mínima del vertedero.

Reduciendo tenemos:

$$5\,h^2 x + 30\,hx\,\sqrt{hx} + 45\,hx^2 + 45\,Hh\,\sqrt{hx}$$

$$+51\,hx\,H + 45\,H^2 h - 32\,H^2 x = 0$$

Haciendo $\sqrt{x} = Z$, $\sqrt{h} = m$, y dividiendo todos los términos por $45\ m^2$ tenemos

$$Z^4 + 0{,}67\ m\,z^3 + \left(0{,}11\ m^2 + 1{,}13\ H - 0{,}71\ \frac{H^2}{m^2}\right) Z^2$$

$$+ H\,m\,Z + H^2 = 0 \qquad [A]$$

Esta última expresión de una ecuación completa de 4° grado.

Por el hecho que el método de solución es poco conocido, será interesante indicar una manera práctica de resolver la ecuación de 4° grodo expuesta algnuas veces en los tratados de geometría analítica. Se ha visto en álgebra superior que una ecuación de grado n

$$z^n + a\,z^{n-1} + b\,z^{n-2} + \ldots\ldots + f = 0$$

puede transformarse en otra

$$z^n + p\,z^{n-2} + q\,z^{n-3} + \ldots\ldots + k = 0$$

cuyo segundo término ha desaparecido.

En general la ecuación de tercer grado

$$z^3 + az^2 + b\,z + c = 0$$

puede transformarse en esta otra

$$z^3 + p\,z + q = 0 \qquad [1]$$

También la ecuación de cuarto grado

$$z^4 + a\,z^3 + b\,z^2 + c\,z + d = 0$$

puede ser reemplazado por

$$z^4 + p\,z^2 + q\,z + r = 0 \qquad [2]$$

Para hacer así, es necesario en el primer caso substituir por z el valor $(y - \frac{a}{3})$, y en el segundo $z = y - \frac{a}{4}$

Consideremos la ecuación

$$z^3 + p\,z + q = 0 \qquad [3]$$

en la cual p y q son constantes.

Se la puede considerar como resultado de la eliminación de y en las ecuaciones

$$y + z^2 \qquad [4]$$
$$zy + pz + q = 0 \qquad [5]$$

La ecuación (4) es una parábola, la segunda, (5), representa una hipérbola. De consiguiente, si dos curvas representadas por (4) y (5) son delineadas con relación á un sistema de ejes coordinados, la abcisa de los puntos de intersección indican las raíces de la ecuación propuesta (3); bastará por tanto medir las abcisas del diagrama delineado.

Siu embargo, se observará que para cada ecuación que resolver, si fuera necesario construir una hipérbola (5), no sería ventajoso el sistema. Se ha obviado esto sustituyendo á la hipérbola un círculo de relaciones definidas, el cual es más fácil dibujar simplificando así el problema, (fig. 5)

Multiplicando (3) por z nos dá:

$$z^4 + p\,z^2 + q\,z = 0$$

ó según la (4)

$$y^2 + p\,y + q\,z = 0 \qquad (6)$$

La última expresión puede reemplazarse por otra que se obtiene sumando [4] y (6)

$$z^2 + y^2 + (p-1)\,y + q\,z = 0 \qquad (7)$$

Esta ecuación representa un círculo que pasa por el origen, y cuyo centro se determina por las coordinadas.

$$\alpha, = -\frac{q}{2}; \quad \beta = -\frac{p-1}{2}$$

Luego es evidente que las raíces de la ecuación (3) son las abcisas de los puntos de intersección de la parábola (4) y del círculo (7). Multiplicando (3) por z, se introduce una raíz $z = 0$ que no afeçta los resultados.

De la misma manera el método para resolver la ecuación de cuarto grado nos lleva á la ecuación de un círculo, cuyo centro tiene por coordenadas

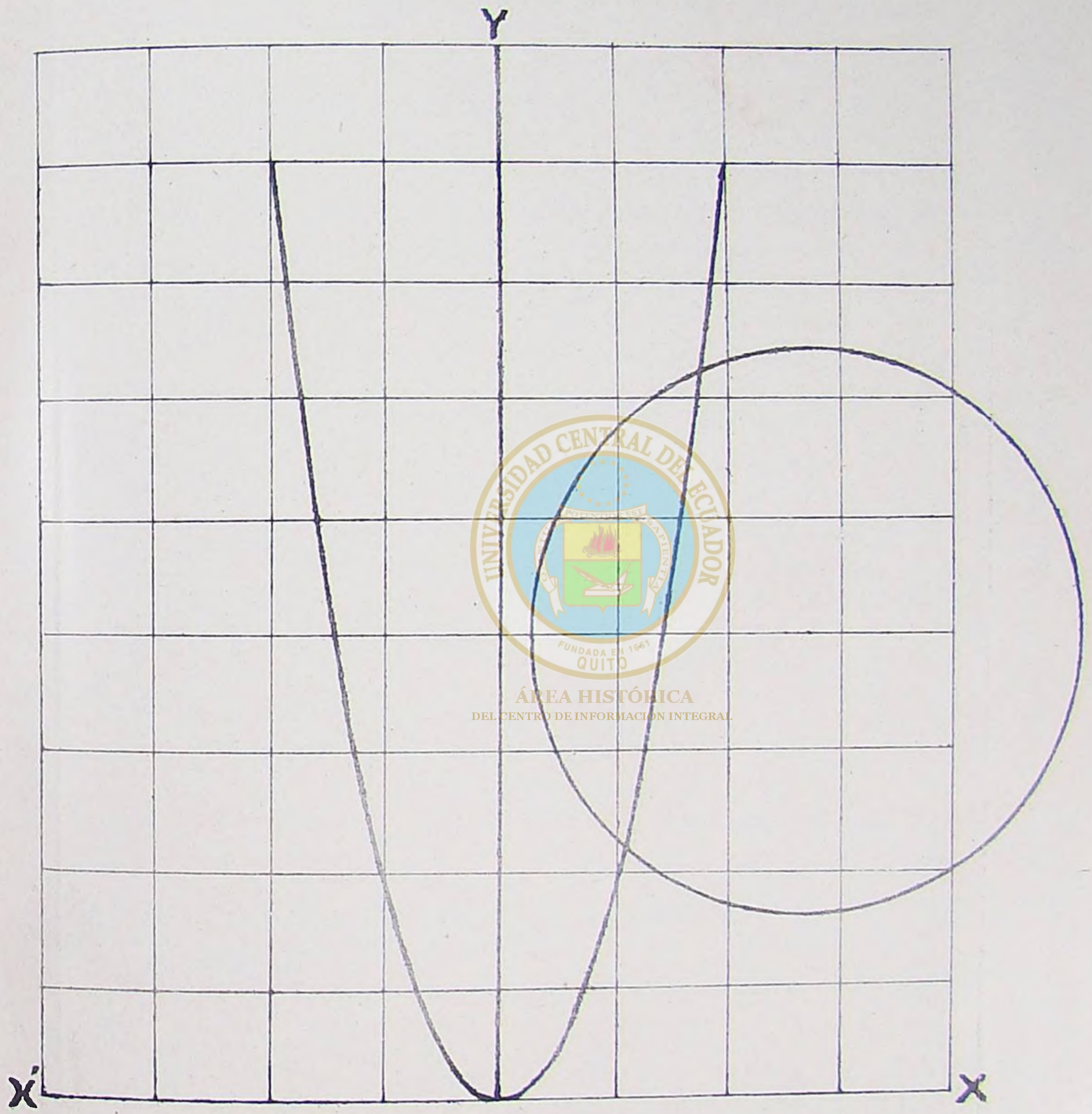


Fig. 5

$$\alpha = -\frac{q}{2} \qquad \beta = -\frac{p-1}{2}$$

y el radio

$$R = \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + (p-1)^2 - 4r}$$

Usando la misma parábola en todos los casos se ha visto que cuando se dibuja esta curva una vez, y con un círculo bien determinado en cada caso, será relativamente fácil resolver con razonable aproximación todas las ecuaciones de cuarto grado.

Volviendo á la ecuación (A), el término [$0{,}61\ m\ z^3$] se hará desaparecer sustituyendo por z la expresión.

$$\left(y - \frac{0{,}67\ m}{4}\right) \quad ó \quad [y - 0{,}17\ m]$$

Por reducción, la ecuación total se convierte en:

$$y^4 + \left(1{,}13\ H - 0{,}06\ m^2 - 0{,}71\ \frac{H^2}{m^2}\right)y^2$$

$$+ \left(0{,}014\ m^3 + 0{,}24\ \frac{H^2}{m} + 0{,}62\ Hm\right)y - 0{,}14Hm^2 + 0{,}0008m^4$$

$$+ 0{,}98\ H^2 = 0 \qquad [A]$$

Esta ecuación debe ser resuelta para todos los casos determinados, en los cuales se da $h = m^2$ y H.

Las coordenadas del centro del círculo se determina por

$$\alpha = -\frac{q}{2} = -\left(\frac{0{,}014m^3 + 0{,}24\frac{H^2}{m} + 0{,}62\ Hm}{2}\right)$$

$$\beta = -\frac{p-1}{2} = -\left(\frac{1{,}13H - 0{,}06m^2 - 0{,}71\ \frac{H^2}{m^2} - 1}{2}\right)$$

El radio se obtiene por propia sustitución en

$$R = \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + [p-1]^2 - 4r}$$

en la cual

$$4r = 4\,[-0{,}14\ Hm^2 + 0{,}0008m^4 + 0{,}98H^2\,]$$

Habiendo trazado las curvas á una escala conveniente, siendo medida la abcisa en el punto de intersección, este valor de y debe ser sustituido en

$$z = [y - 0{,}17m]$$

Conociendo z, y elevando al cuadrado este valor se obtiene x que es la incógnita.

La base se obtendrá por sustitución en

$$\frac{3\sqrt{hx}\,[x+H]+hx}{4x}$$

Para dar un sabor práctico á toda esta discusión, tomemos un caso concreto: supongamos para ello,

$$H = 25;\quad h = 4$$

Las coordenadas del centro del círculo serán:

$$\alpha = -53,\quad \beta = 40$$

y el radio del mismo $R = 61{,}7$.

Se debe observar que la escala de la abcisa ha de ser tal que satisfaga la inecuación $y^2 < H$, en la cual, y, siendo la incógnita de la ecuación de cuarto grado, es al mismo tiempo la abcisa cuya escala se ha de tomar en la solución gráfica.

Esto nos ayudará á determinar, en caso de muchos puntos de intersección en el diagrama, cual de las raíces es la verdadera en el caso considerado, [fig. 6]. Midiendo la abcisa en el presente caso, se encuentra $y = 4$, y considerando que

$$z = y - 0{,}17m \qquad y \qquad z^2 = x$$

tenemos que

$$x = 13{,}40$$

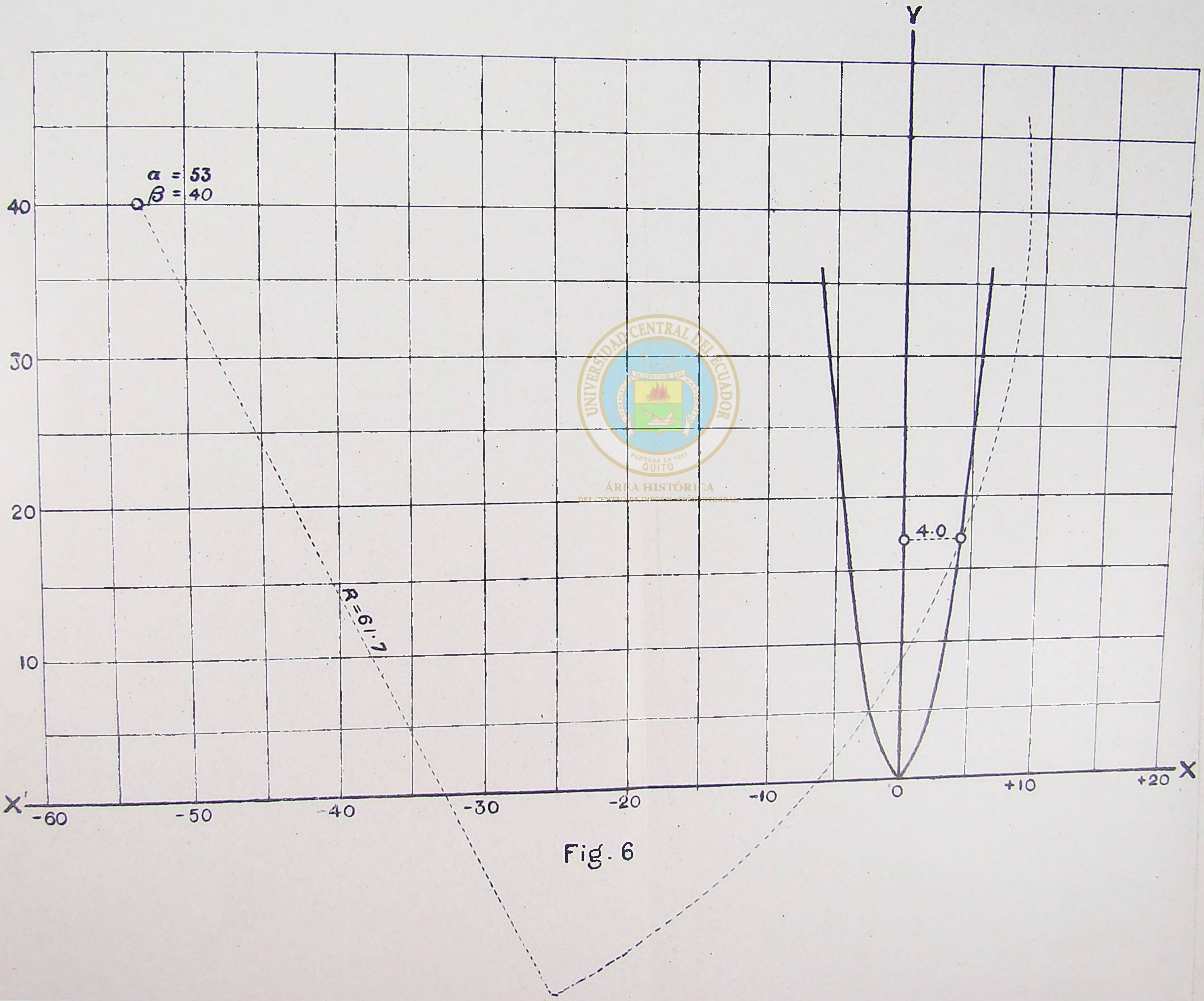


Fig. 6

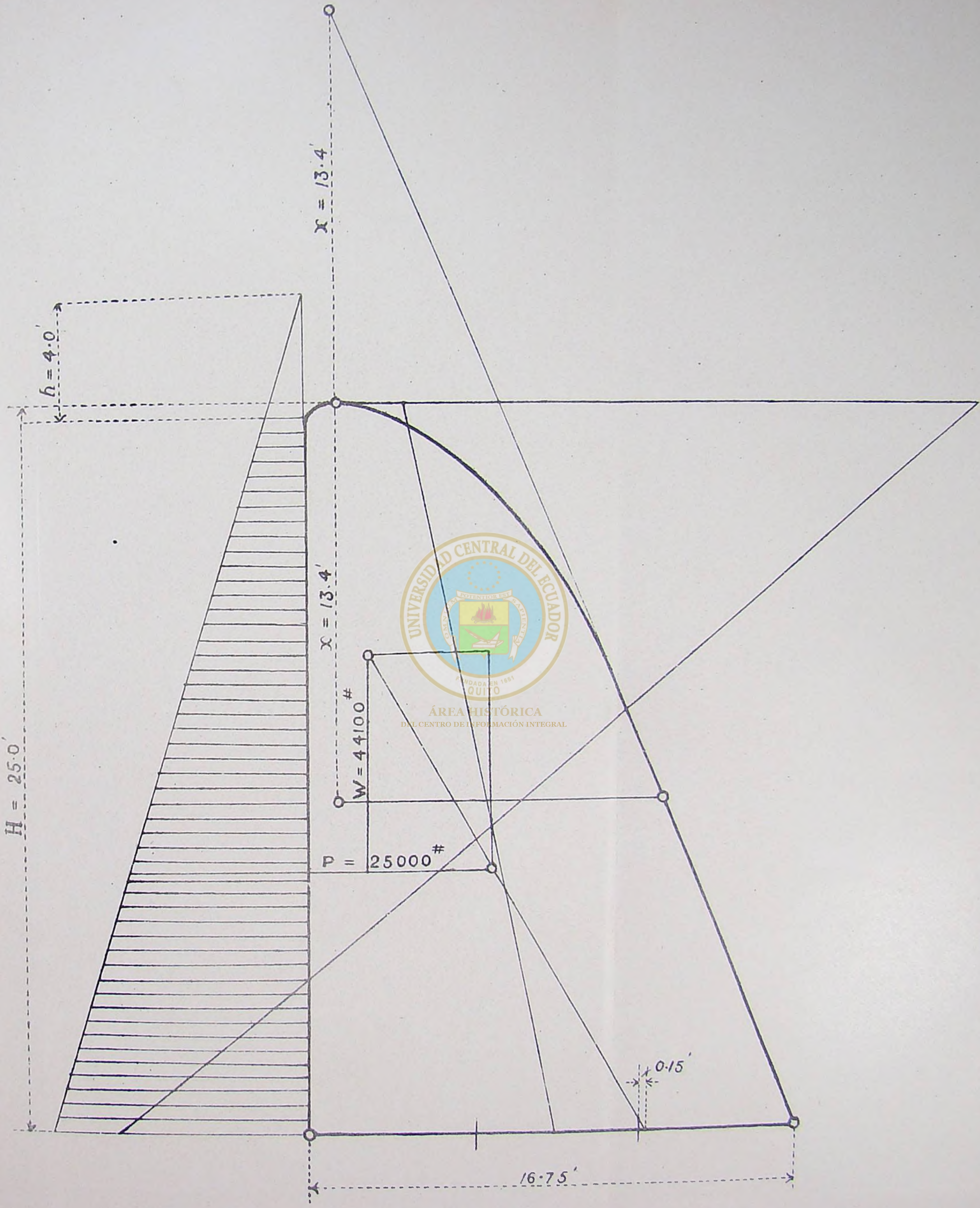
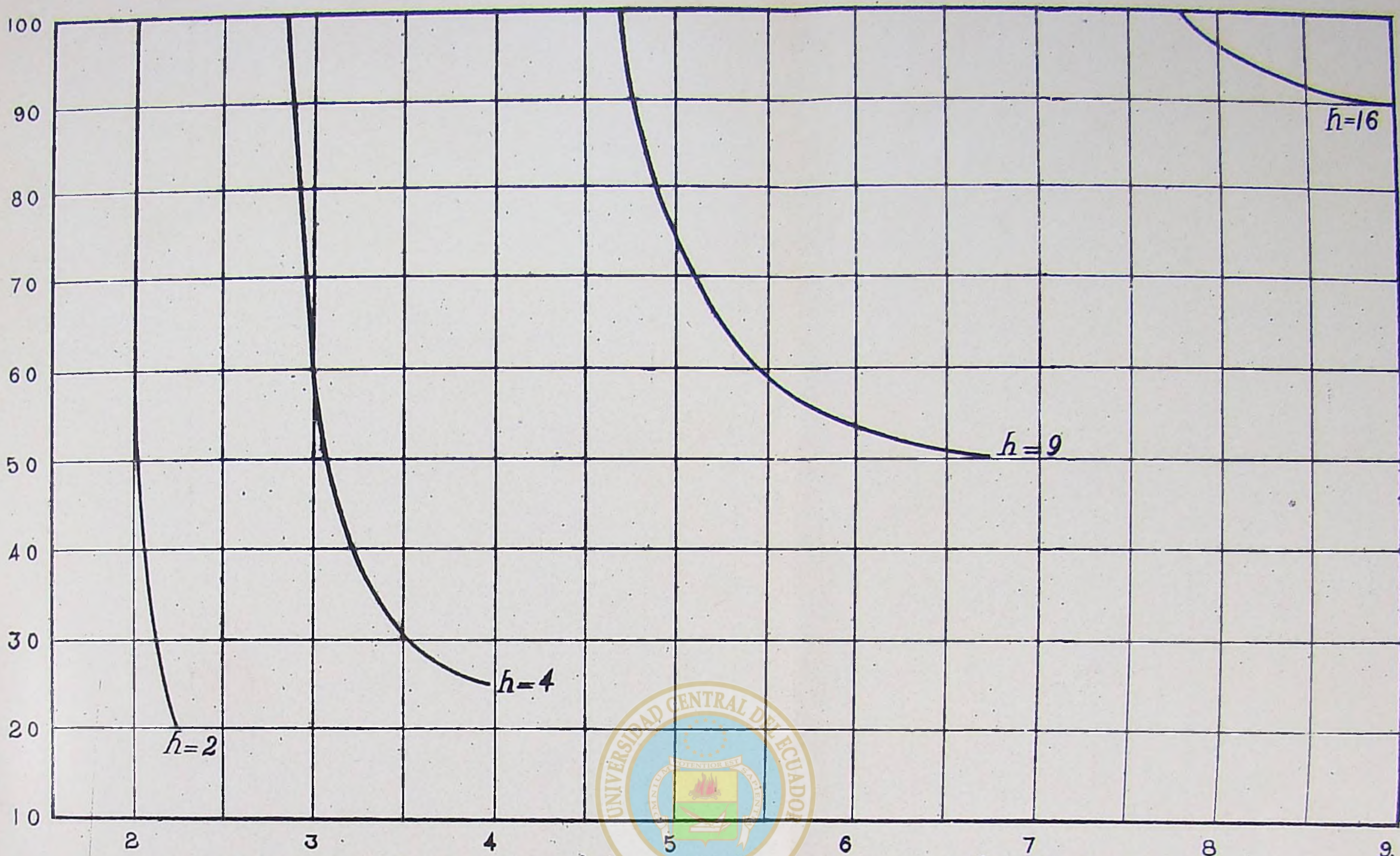


Fig. 7



VALORES DE Y EN FUNCION DE H Y h EN LA ECUACION DE 4° GRADO

Fig 8

ALTURA DEL VERTEDERO H	PROFUNDIDAD DEL DERRAME h o m²							
	h=2		h=4		h=9		h=16	
	y	x	y	x	y	x	y	x
20	2.24	4.00						
25	2.15	3.65	3.98	13.25				
30	2.11	3.50	3.51	10.04				
40	2.06	3.31	3.20	8.18				
50	2.03	3.20	3.08	7.51	6.79	39.44		
60	2.01	3.13	3.03	7.13	5.44	24.30		
70	2.00	3.10	2.96	6.86	5.11	21.16		
80	1.99	3.06	2.91	6.60	4.89	19.18		
90	1.98	3.03	2.87	6.40	4.77	18.15	8.98	68.98
100	1.97	2.99	2.85	6.30	4.67	17.31	7.77	50.27

Fig 9

El ancho de la base del vertedero, por sustitución es 16,75, cuyo perfil se ha trazado en la (fig. 7).

Los cálculos inferiores representan la solución gráfica en las condiciones de H y L tomadas al azar. Supongamos que m varía de 1,41 á 4; es decir, h varía de 2 á 16, y H de 20 á 100. Se puede construír cuatro curvas suministradas por las hipótesis

$$m = 1{,}41,\ m = 2,\ m = 3,\ m = 4;$$

siendo *y* función de H [fig. 8]. El valor de *y* correspondiente á las curvas situadas entre m = 1,41, y m = 2; m = 2 y m = 3; m = 3 y m = 4 puede ser determinado por interpolación,

El método para calcular una curva se verá aquí.

Curva en la hipótesis de m = 2.

Para m = 2, la ecuación (4) se transforma:

$$y^4 + (1{,}13H + 0{,}24 - 0{,}175H^2)\,y^2 + (0{,}112 + 0{,}12\,H^2 + 1{,}24H)\,y$$
$$-0{,}56\,H + 0{,}98H^2 = 0$$

Haciendo H = 25:

$$y^4 - 81{,}5y^2 + 106y + 598{,}5 = 0$$

ó

$$y^2(y^2 - 81{,}5) + (106y + 598{,}5) = 0$$

Por consiguiente $y^2 < 81.5$ ó $y < \sqrt{81.5}$

Tomo	y = 3	$3+\lambda$	4
El primer miembro se hace	264	0	−25,5

Se ha visto, pues, que el valor del primer miembro pasa de positivo á negativo cuando *y* pasa de 3 á 4: supongamos que $3+\lambda$ sea una raíz de la ecuación, así que:

$$\frac{3+\lambda-3}{0-264} = \frac{4-3}{-25.5-264} \quad \text{ó} \quad \frac{\lambda}{-264} = \frac{1}{-289.5}$$

De la cual

$$\lambda = 0{,}91$$

Por consiguiente $y = 3.91$ es una raíz. Siendo este un valor de y correspondiente á $H = 25$, para $H = 30$, $H = 40$,...... $H = 100$ corresponderán otros valores de y tales que la curva pueda trazarse para $m = 2$; y así para $m = 1, 41$; $m = 3$; $m = 4$. En la tabla que acompaño (fig. 9) se dan los valores de y según los cuales se han trazado las curvas, y para cada valor de y, el valor correspondiente de x.

Determinando así el valor de x el ancho de la base, se obtiene por sustitución, como en el método gráfico, en la expresión

$$\frac{3\sqrt{hx}\,(x+H) + hx}{4x}$$

En la tabla se observa también que cuando h es muy grande con respecto á H, como cuando $h = 9$ y $H = 25$, y es imaginario. La razón $\frac{L}{H}$ cuando es mayor que $1/5$ da para y valores imaginarios.

RICHARD MULLER,
Profesor de Ingeniería Eléctrica.